



Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 1

11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Найдите остаток от деления числа $2021^{2022} + 2023^{2022}$ на 2022.		15
2	Построены 4 круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. Найдите площадь пересечения этих кругов, если сторона квадрата равна 1		20
3	Решите систему уравнений . $\begin{cases} 5 x+1 +4 y+2 =20 \\ 2 x-3 + y+4 =2 \end{cases}$		25
4	В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде, площадь дна которого $S = 50\text{см}^2$, закрытого поршнем массой m , находится одноатомный идеальный газ. Газ нагревают и поршень очень медленно перемещается на расстояние l . Цилиндр ставят на дно и сообщают газу в $n = 2$ раза большее количество тепла для того, чтобы поршень переместился вверх на то же расстояние. Найти массу поршня. Атмосферное давление $p_0 = 100\text{ кПа}$. Считать ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Нагревом поршня и стенок цилиндра пренебречь.		15
5	На неподвижный шар массой M налетает шар массой m , движущийся поступательно со скоростью v . Считая удар абсолютно упругим и центральным, найти отношение M/m , при котором шар m теряет четвертую часть своей кинетической энергии.		25



Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 2

11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Найдите остаток от деления числа $2025^{2022} + 2027^{2022}$ на 2026.		15
2	Построены 4 круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. При этом внутри квадрата образуется фигура, содержащая площадь пересечения всех этих кругов, и 4 «лепестка» от попарного пересечения кругов. Найдите площадь одного «лепестка».		20
3	Решите систему уравнений. $\begin{cases} 5 x-1 + 4 y-2 = 20 \\ 2 x+3 + y = 2 \end{cases}$		25
4	Идеальная тепловая машина совершает с секунду $n = 4$ цикла. Температура нагревателя данной машины $T_1 = 300$ К, температура холодильника $T_2 = 180$ К, количество теплоты, получаемое от нагревателя за цикл, $Q = 200$ Дж. На какое расстояние за время $t_0 = 3$ с переместится по горизонтальной дороге тележка, приводимая в движение такой машиной, если сила сопротивления $F = 48$ Н? Скорость тележки считать постоянной.		15
5	Два шарика массами $m_1 = 20$ г и $m_2 = 30$ г покоятся на горизонтальном гладком столе. В шарик m_1 попадает пуля массой $m_0 = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $V_0 = 100 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, и застревает в нем. Найти максимальную потенциальную энергию взаимодействия шариков достигаемую в процессе их последующего центрального абсолютно упругого удара.		25



Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 3

11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Найдите остаток от деления числа $2023^{2022} + 2025^{2022}$ на 2024.		15
2	Построены 4 круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. При этом внутри квадрата образуется фигура, содержащая площадь пересечения всех этих кругов, и «лепестки» от попарного пересечения кругов. Найдите площадь всех «лепестков».		20
3	Решите систему уравнений . $\begin{cases} 5 x-2 +4 y+3 =20 \\ 2 x-6 + y+1 =2 \end{cases}$		25
4	Сосуд объемом $V_1 = 20$ л содержит одноатомный идеальный газ массой $m_1 = 200$ г и молярной массой $M = 20$ г/моль при температуре $T_1 = 150$ К, а сосуд объемом $V_2 = 30$ л – содержит тот же газ массой $m_2 = 350$ г при температуре $T_2 = 200$ К . Сосуды соединяют трубкой. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом с окружающей средой, найти установившееся в сосудах давление p . Считать универсальную газовую постоянную $R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$. Ответ дать в кПа.		15
5	Два покоящихся на горизонтальном гладком столе шарика массами $m_1 = 20$ г и $m_2 = 30$ соединены недеформированной пружиной длиной $l = 20$ см. В шарик m_1 попадает пуля массой $m_0 = 10$ г , летящая горизонтально вдоль соединяющей шарик линии и застревает в нем. Найти минимальную длину сжатой пружины при последующем движении шариков, если жесткость пружины $k = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$. Ответ дать в см.		25



Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 4

11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Найдите остаток от деления числа $2027^{2022} + 2029^{2022}$ на 2028.		15
2	Построены 4 круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. При этом внутри квадрата образуется фигура, содержащая, и 4 «лепестка» от попарного пересечения кругов. Найдите площадь «цветочка», образованного 4-мя «лепестками» и площадью пересечения всех этих кругов.		20
3	Решите систему уравнений . $\begin{cases} 5 x+2 +3 y+1 =15 \\ 3 x+5 + y+4 =3 \end{cases}$		25
4	Из начального состояния идеальный одноатомный газ массой $m = 64$ г и молярной массой $M = 32 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ адиабатически расширяется, причем его температура изменяется от $T_1 = 400$ К до $T_2 = 200$ К . Затем газ сжимается при давлении $p_0 = 200$ кПа до первоначального объема $V_0 = 500 \text{ см}^3$. Цикл замыкается изохорой V_0 . Найти работу, совершенную газом за цикл? Считать универсальную газовую постоянную $R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.		15
5	Два шарика массами $m_1 = 20$ г и $m_2 = 30$ соединены недеформированной пружиной длиной $l = 20$ см и покоятся на горизонтальном гладком столе. В шарик m_1 попадает пуля массой $m_0 = 10$ г , летящая горизонтально вдоль оси пружины, и застревает в нем. Найти максимальную длину сжатой пружины при последующем движении шариков, если ее жесткость $k = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$.		25



Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 1

11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Найдём отдельно остаток от деления каждого из слагаемых на 2022. $2021^{2022} = (2022 - 1)^{2022} = \underbrace{(2022 - 1) \cdot (2022 - 1) \cdot \dots \cdot (2022 - 1)}_{2022 \text{ раз}}$ После раскрытия всех скобок получается выражение, которое можно представить в виде $2022A + 1$. Оно, очевидно, делится на 2022 с остатком 1. $2023^{2022} = (2022 + 1)^{2022} = \underbrace{(2022 + 1) \cdot (2022 + 1) \cdot \dots \cdot (2022 + 1)}_{2022 \text{ раз}}$ Аналогично, после раскрытия всех скобок получается выражение, которое можно представить в виде $2022A + 1$. Оно, очевидно, делится на 2022 с остатком 1. Таким образом, каждое из слагаемых делится на 2022 с остатком 1, при этом сумма делится на 2022 с остатком 2.	2	
2	Искомая площадь равна площади четырех сегментов АВ и квадрата ABCD. Центральный угол АОВ сегмента АВ равен 30°, так как угол $МОВ=60^\circ$, а значит угол $NOB=30^\circ$. Поэтому площадь сегмента АВ равна $\frac{\pi r^2 \cdot 30}{360} - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 30^\circ = \frac{\pi r^2}{12} - \frac{r^2}{4}$, а учетверенная площадь сегмента при $r=1$ равна $\pi/3 - 1$. Площадь квадрата равна $2 - \sqrt{3}$. Поэтому площадь пересечения четырех кругов будет равна $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$.	$\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$	
3	Заметим, что геометрическим местом точек, являющимся решением первого уравнения, является ромб с вершинами $(-5;-2)$, $(-1;3)$, $(3;-2)$, $(-1;-5)$. Геометрическим местом точек, являющимся решением второго уравнения, тоже является ромб с вершинами $(2;-4)$, $(3;-2)$, $(4;-4)$, $(3;-6)$. Пересечением этих геометрических мест точек решений является всего одна точка – $(3;-2)$.	$(3;-2)$	
4	$Q_1 = \frac{5}{2} p_0 l S$ $Q_2 = n Q_1 = \frac{5}{2} (p_0 + \frac{mg}{S}) l S$ $\frac{Q_2}{Q_1} = n = \frac{p_0 + \frac{mg}{S}}{p_0} = 1 + \frac{mg}{S p_0}$ $m = \frac{(n - 1) S p_0}{g} = 50 \text{ кг}$	50 кг	

5	Первый способ $\frac{mv^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$ $\frac{Mv_1^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{mv^2}{2}$ $v_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{M}} v$ $2 \pm \sqrt{3} = \sqrt{\frac{M}{m}}$ Второй способ $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{mv^2}{2}$ $\frac{mv^2}{2} = \frac{4}{3}$ $v \frac{\sqrt{3}}{2} = v_2$ $mv = Mv_1 \pm mv_2$ $mv = M \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{M}} v \pm m \frac{\sqrt{3}}{2}$ $1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{m}} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	(2 ± √3) ²	
---	--	-----------------------	--