



Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 1

11 класс

| № | Задание | Ответы | Баллы |
|---|--|---|-------|
| 1 | Найдите остаток от деления числа $2021^{2022} + 2023^{2022}$ на 2022. | 2 | 15 |
| 2 | Построены 4 круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. Найдите площадь пересечения этих кругов, если сторона квадрата равна 1 | $\frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{3}$ | 20 |
| 3 | Решите систему уравнений $\begin{cases} 5 x+1 + 4 y+2 = 20 \\ 2 x-3 + y+4 = 2 \end{cases}$ | $(3; -2)$ | 25 |
| 4 | В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде, площадь дна которого $S = 50 \text{ см}^2$, закрытого поршнем массой m , находится одноатомный идеальный газ. Газ нагревают и поршень очень медленно перемещается на расстояние l . Цилиндр ставят на дно и сообщают газу в $n = 2$ раза большее количество тепла для того, чтобы поршень переместился вверх на то же расстояние. Найти массу поршня. Атмосферное давление $p_0 = 100 \text{ кПа}$. Считать ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Нагревом поршня и стенок цилиндра пренебречь. | | 15 |
| 5 | На неподвижный шар массой M налетает шар массой m , движущийся поступательно со скоростью v . Считая удар абсолютно упругим и центральным, найти отношение M/m , при котором шар m теряет четвертую часть своей кинетической энергии. | $1) \frac{M}{m} = \frac{2u_2^2 - u_1^2}{3u_2(2v - u_1)}$ $2) \frac{M}{m} = \frac{u_2(2u_2 - 3v - 3u_1)}{u_1^2}$ | 25 |



1. $2021^{2022} + 2023^{2022}$ на 2022

В любой степени 2021 будет оканчиваться на 1, а 2023 на:

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = \dots 7$$

$$3^4 = \dots 1$$

$$3^5 = \dots 3$$

$$3^6 = \dots 9$$

$$3^7 = \dots 7$$

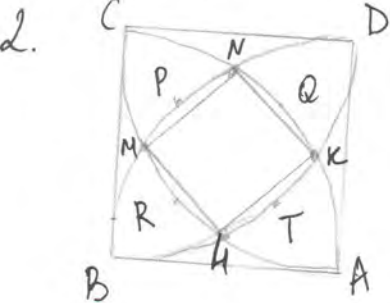
$$3^8 = \dots 1$$

$$3^9 = \dots 3$$

$$3^{10} = \dots 9 \Rightarrow 2023^{2022} = \dots 1 \Rightarrow 2021^{2022} + 2023^{2022} = \dots 2 = a$$

$$a: 2022 = \dots 2$$

Ответ: 2



Общая часть 4-х кругов радиусом 1 с центрами в вершинах данного квадрата ABCD состоит из 4-х одинаковых сегментов MPN, NQK, KTL, LRM и квадрата MNKL. Т.к. M, N, K, L - точки пересечения данных кругов, то $\triangle ABN$ и $\triangle AMD$ - правильные треугольники (их стороны равны стороне квадрата)

$$\angle BAN = \angle DAM = 60^\circ, \angle MAN = 30^\circ$$

По теореме косинусов

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos A = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$S_{MNKL} = MN^2 = 2 - \sqrt{3}$$

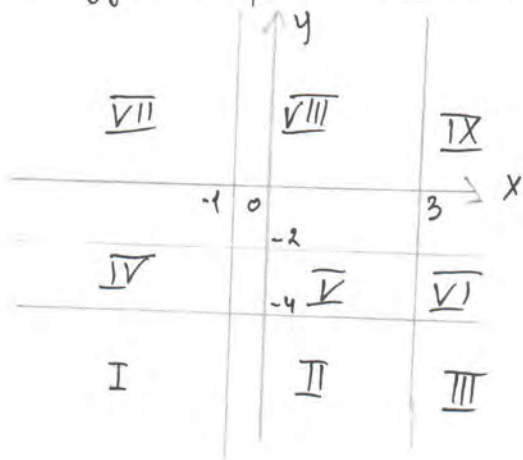
$$S_{MPN} = \frac{\pi \cdot 1^2}{360^\circ} \cdot 30^\circ - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 30^\circ = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}$$

$$4 S_{MPN} + S_{MNKL} = 4 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \right) + 2 - \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = \frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{3}$

$$3. \begin{cases} 5|x+1| + 4|y+2| = 20 \\ 2|x-3| + |y+4| = 2 \end{cases}$$

Введем в рассмотрение плоскость xOy и построим прямые $x=-1$, $x=3$, $y=-2$, $y=-4$, на которых выразим, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль.



Эти прямые разбивают плоскость на 9 областей, задаваемых следующими системами.

$$1) \begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq -4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ y \leq -4 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq -4 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x \leq -1 \\ -4 \leq y \leq -2 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ -4 \leq y \leq -2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x \geq 3 \\ -4 \leq y \leq -2 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} x \leq -1 \\ y \geq -2 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ y \geq -2 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq -2 \end{cases}$$

Рассмотрим данную систему на каждой из данных областей.

1) Для x и y из (I) области, имеем систему

$$\begin{cases} -5(x+1) - 4(y+2) = 20 \\ -2(x-3) - (y+4) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 5 - 4y - 8 = 20 \\ -2x + 6 - y - 4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 4y = 33 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

$$y = -2x$$

$$-5x - 4(-2x) = 33$$

$$-5x + 8x = 33$$

$$3x = 33$$

$$x = 11, \quad y = -2 \cdot 11 = -22$$

$x=11$, $y=-22$ не принадлежит рассматриваемой области, и, следовательно, не является решением исходной системы.



2) Для x и y , принадлежащих (II) области, имеем систему

$$\begin{cases} 5(x+1) - 4(y+2) = 20 \\ -2(x-3) - (y+4) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+5-4y-8=20 \\ -2x+6-y-4=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x-4y=23 \\ -2x-y=0 \end{cases}$$

$$y = -2x$$

$$5x - 4(-2x) = 23$$

$$5x + 8x = 23$$

$$13x = 23; x = \frac{23}{13} = 1 \frac{10}{13}$$

$$y = -2 \cdot \frac{23}{13} = -\frac{46}{13} = -3 \frac{7}{13}$$

$$x = \frac{23}{13} = 1 \frac{10}{13}; y = -3 \frac{7}{13}$$

не принадлежит рассматриваемой области \Rightarrow
 \Rightarrow не является решением исходной системы

3) Для x и y , принадлежащих (III) области, имеем систему

$$\begin{cases} 5(x+1) - 4(y+2) = 20 \\ 2(x-3) - (y+4) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+5-4y-8=20 \\ 2x-6-y-4=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x-4y=23 \\ 2x-y=12 \end{cases}$$

$$y = 2x - 12$$

$$5x - 4(2x - 12) = 23$$

$$5x - 8x + 48 = 23$$

$$-3x = -25$$

$$x = \frac{25}{3} = 8 \frac{1}{3}, y = 2 \cdot \frac{25}{3} - 12 = 4 \frac{2}{3}$$

$x = 8 \frac{1}{3}, y = 4 \frac{2}{3}$ не принадлежит рассматриваемой области \Rightarrow
 \Rightarrow не является решением исходной системы

4) Для x и y , принадлежащих (IV) области, имеем систему

$$\begin{cases} -5(x+1) - 4(y+2) = 20 \\ -2(x-3) + (y+4) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x-5-4y-8=20 \\ -2x+6+y+4=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 4y = 33 \\ -2x + y = -8 \end{cases}$$

$$y = 2x - 8$$

$$-5x - 4(2x - 8) = 33$$

$$-5x - 8x + 32 = 33$$

$$-13x = 1$$

$$x = -\frac{1}{13}, y = 2\left(-\frac{1}{13}\right) - 8 = -8\frac{2}{13}$$

$x = -\frac{1}{13}; y = -8\frac{2}{13}$ не принадлежит рассматриваемой области \Rightarrow
 \Rightarrow не является решением исходной системы

5) Для x и y , принадлежащих (V) области, имеем систему

$$\begin{cases} 5(x+1) - 4(y+2) = 20 \\ -2(x-3) + (y+4) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 5 - 4y - 8 = 20 \\ -2x + 6 + y + 4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y = 23 \\ -2x + y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y = 23 \\ -2x + y = -8 \end{cases}$$

$$y = 2x - 8$$

$$5x - 4(2x - 8) = 23$$

$$5x - 8x + 32 = 23$$

$$-3x = -9$$

$$x = 3$$

$$y = 2 \cdot 3 - 8 = -2$$

$$x = 3, y = -2$$

$x = 3, y = -2$ принадлежит рассматриваемой области \Rightarrow является решением исходной системы.

6) Для x и y , принадлежащих (VI) области, имеем систему

$$\begin{cases} 5(x+1) - 4(y+2) = 20 \\ 2(x-3) + (y+4) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 5 - 4y - 8 = 20 \\ 2x - 6 + y + 4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y = 23 \\ 2x - 2 + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y = 23 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$y = 4 - 2x$$

$$5x - 4(4 - 2x) = 23$$

$$5x - 16 + 8x = 23$$

$$13x = 39$$

$$x = 3, y = 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

$$x = 3, y = -2$$

$$x = 3, y = -2$$

$x = 3, y = -2$ принадлежит рассматриваемой области \Rightarrow является решением исходной системы (совпадает с (5))

7) Для x и y из (VII) области имеем систему

$$\begin{cases} -5(x+1) + 4(y+2) = 20 \\ -2(x-3) + (y+4) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 5 + 4y + 8 = 20 \\ -2x + 6 + y + 4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x + 4y = 17 \\ -2x + y = -8 \end{cases}$$

$$y = 2x - 8$$

$$-5x + 4(2x - 8) = 17$$

$$-5x + 8x - 32 = 17$$

$$3x = 49$$

$$x = \frac{49}{3} = 16\frac{1}{3} \quad y = 2 \cdot \frac{49}{3} - 8 = 24\frac{2}{3}$$

$x = 16\frac{1}{3}$, $y = 24\frac{2}{3}$ не принадлежит заданной области \Rightarrow не является решением исходной системы

8) Для x и y из (VIII) области имеем систему

$$\begin{cases} 5(x+1) + 4(y+2) = 20 \\ -2(x-3) + (y+4) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 5 + 4y + 8 = 20 \\ -2x + 6 + y + 4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ -2x + y = -8 \end{cases}$$

$$y = 2x - 8$$

$$5x + 4(2x - 8) = 7$$

$$5x + 8x - 32 = 7$$

$$13x = 39$$

$$x = 3; \quad y = 2 \cdot 3 - 8 = 6 - 8 = -2$$

$x = 3$, $y = -2$ принадлежит рассматриваемой области \Rightarrow является решением исходной системы (совпадает с (5) и (6))

9) Для x и y из (IX) области шеем систему

$$\begin{cases} 5(x+1)+4(y+2)=20 \\ 2(x-3)+(y+4)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+5+4y+8=20 \\ 2x-6+y+4=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+4y+13=20 \\ 2x-6+y+4=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+4y=7 \\ 2x-6+y+4=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+4y=7 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+4y=7 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

$$y = -2x + 4$$

$$5x + 4(-2x + 4) = 7$$

$$5x - 8x + 16 = 7$$

$$-3x = -9$$

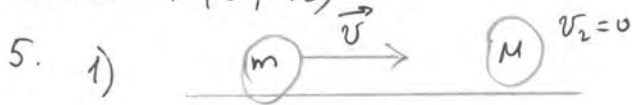
$$x = 3$$

$$y = -2 \cdot 3 + 4 = -2$$

$x=3, y=-2$ принадлежит рассматриваемой области \Rightarrow является решением исходной системы (совпадает с (5), (6) и (8))

Следовательно, заданная система имеет единственное решение $(3; -2)$

Ответ: $(3; -2)$



1 случай



Шары после удара движутся в разные стороны

$$\begin{cases} m v = M u_2 - m u_1 \\ \frac{3}{4} \frac{m v^2}{2} = \frac{M u_2^2}{2} + \frac{m u_1^2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} \left(\frac{M u_2 - m u_1}{2} \right) \cdot v = \frac{M u_2^2}{2} + \frac{m u_1^2}{2}$$

$$\frac{3}{2} (M u_2 - m u_1) \cdot v = M u_2^2 + m u_1^2$$

$$3 M u_2 \cdot v - 3 m u_1 \cdot v = 2 M u_2^2 + 2 m u_1^2$$

$$3 M u_2 v - 3 u_1 (M u_2 - m u_1) = 2 m u_2^2 + 2 m u_1^2$$

$$3 M u_2 v - 3 u_1 \cdot M u_2 + 3 u_1^2 m = 2 m u_2^2 + 2 m u_1^2$$

$$3 M u_2 v - 3 M u_1 u_2 + m u_1^2 = 2 m u_2^2$$

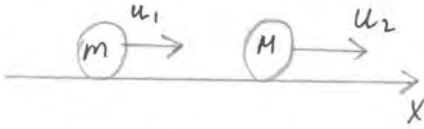
$$3 M u_2 v - 3 M u_1 u_2 = 2 m u_2^2 - m u_1^2$$

$$3 M (u_2 \cdot v - u_1 u_2) = m (2 u_2^2 - u_1^2)$$

$$\frac{M}{m} = \frac{2 u_2^2 - u_1^2}{3 u_2 \cdot v - 3 u_1 u_2} = \frac{2 u_2^2 - u_1^2}{3 u_2 (v - u_1)}$$



2 шары



Шары после удара движутся в одну сторону

$$\int \begin{cases} m v = M u_2 + m u_1, \\ \frac{3}{4} \frac{m v^2}{2} = \frac{M u_2^2}{2} + \frac{m u_1^2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} \frac{m v^2}{2} = \frac{M u_2^2}{2} + \frac{m u_1^2}{2}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{(M u_2 + m u_1) \cdot v}{2} = \frac{M u_2^2}{2} + \frac{m u_1^2}{2}$$

$$\frac{3}{2} (M u_2 + m u_1) \cdot v = M u_2^2 + m u_1^2$$

$$3 M u_2 v + 3 m u_1 v = 2 M u_2^2 + 2 m u_1^2$$

$$3 M u_2 v + 3 u_1 (M u_2 + m u_1) = 2 M u_2^2 + 2 m u_1^2$$

$$3 M u_2 v + 3 M u_1 u_2 + 3 m u_1^2 = 2 M u_2^2 + 2 m u_1^2$$

$$m u_1^2 = 2 M u_2^2 - 3 M u_2 v - 3 M u_1 u_2$$

$$m u_1^2 = M (2 u_2^2 - 3 u_2 v - 3 u_1 u_2)$$

$$\frac{M}{m} = \frac{2 u_2^2 - 3 u_2 v - 3 u_1 u_2}{u_1^2} = \frac{u_2 (2 u_2 - 3 v - 3 u_1)}{u_1^2}$$

Ответ: 1) $\frac{M}{m} = \frac{2 u_2^2 - u_1^2}{3 u_2 (v - u_1)}$;

2) $\frac{M}{m} = \frac{u_2 (2 u_2 - 3 v - 3 u_1)}{u_1^2}$