Шифр

Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

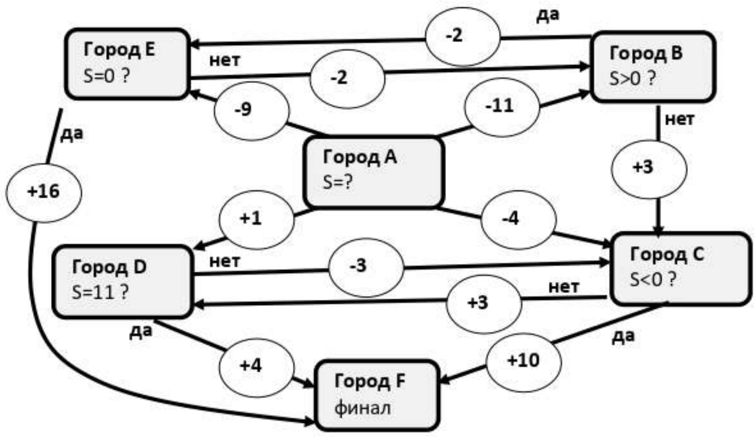
Информационно - технологическое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 2

11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Дан многочлен тринадцатой степени с целочисленными коэффициентами. Известно, что при пяти различных целочисленных значениях аргумента он равен 11. Может ли этот многочлен иметь целочисленные корни? Ответ обоснуйте.		10
2	В процессе розыгрыша первенства по футболу каждая команда должна была сыграть по одному разу со всеми остальными. Команды Зеленых и Белых провели одинаковое количество матчей, после чего были сняты с соревнований. Остальные участники первенства доиграли до конца, и в итоге оказалось, что всего сыграно 58 матчей. Каким могло быть общее количество команд, участвовавших в розыгрыше, и успели ли Зеленые и Белые сыграть между собой? Дайте аргументированный ответ.		15
3	В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B, $AC = 4$ и $BC = 2\sqrt{11}$. Найдите AB.		25
4	Закодируйте слово ВОДОРОД, если известно, что для его кодирования выбран код переменной длины таким образом, что слово занимает минимально возможное количество символов, кодирование и декодирование производится с начала кодовой последовательности и для кодирования буквы Р использованы только нули.		10
5	Путешественник начинает свой путь в городе А, имея на своем банковском счету некоторое количество монет S. Сумма на счету – целое число, как положительное, так и отрицательное. Идти из города А он может в любом направлении. Каждая дорога увеличивает или уменьшает имеющуюся у него сумму денег. В следующем городе стражники отправляют путешественника далее в зависимости от того, сколько у него денег в настоящее время. При какой исходной сумме путешественник сможет максимально увеличить сумму на счету к концу маршрута (в городе F) относительно начальной? Каким путем это достигается? Сколько денег на счету будет у путешественника в конце пути в этом случае? Решение должно объяснять Ваш ответ и описывать путь путешественника, который обеспечит максимальный <u>прирост</u> суммы денег на счету в финальном городе. Ответ должен содержать исходное значение, путь (как цепочку городов) и сумму в итоге.		20



6

Робот Отрезок имеет возможность рисовать любые фигуры, состоящие из линий с помощью команды lines(a,u). По команде lines(a,u) Отрезок рисует отрезок длиной a, и поворачивает перо на угол u градусов против часовой стрелки.

Например, команда lines(5, 45) приведет к рисованию линии и повороту пера:

Команда cycle k (<список команд>) позволяет повторять список команд, указанный в скобках k раз.

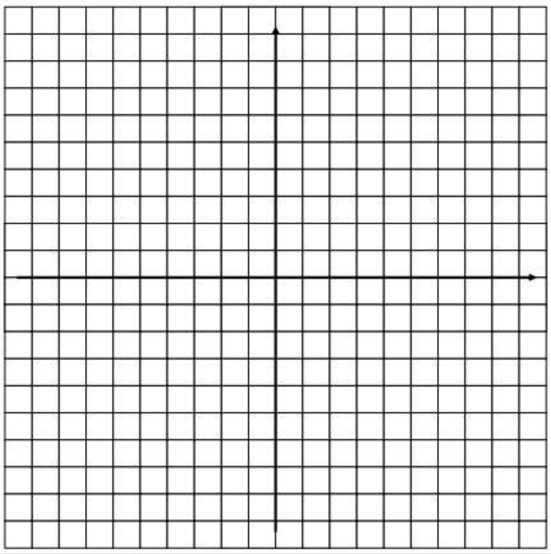
Отрезок умеет работать с целочисленными переменными. Определение и изменение значений переменных реализуется командой присвоения «=»; например, для переменной s

s=<новое значение s>, при этом новое значение переменной может быть как числовым значением, так и арифметическим выражением с использованием классических символов «+», «-», «/», «*».

Программы и подпрограммы Отрезка оформляются как <Имя программы / подпрограммы > (Список параметров для запуска) {Команды}, например Main (){}.

Изобразите, что нарисует Отрезок при запуске программы Main():

```
Linecycle(d, z, t)
{
cycle t (lines(d, z))
}
Main ()
{
a = 3
b = 1
cycle 6 (
Linecycle(a + b, 120, 3)
lines(0, 30)
lines(a*2, 30)
b = -b
)
}
```



20

№2 Общее количество матчей n команд:

$1+2+3+\ldots+n-1.$

Чтобы значение этой формулы было ≥ 58, необходимо, чтобы $n \geq 12$

1) пусть $n = 12$, тогда колич-во матчей, сыгранных 10-ю командами (без участия зеленых и белых) $= 1+2+3+\ldots+9 = 45$. Известно, что кол-во матчей – 58, тогда З. и Б. (зеленые и белые) сыграли $58-45=13$ матчей. Число матчей, сыгр. З. и Б., равно $\Rightarrow$ т.к. число 13 - нечетное, то команды успели сыграть между собой.

2) пусть $n = 13$.

Кол-во матчей 11 команд $= 55$.

$58-55=3$ – матчей З. и Б.

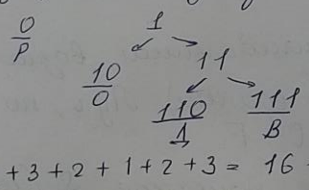
3 - нечетное число $\Rightarrow$ З. и Б. играли между собой.

$n = 13$ не удовлетв. условию задачи, т.к. колич-во матчей, сыгранных $n-2$ командами (всех, кроме З. и Б.) > 58, а известно, что остальные команды доиграли до конца.

Ответ: 12, 13; да, сыграли.

№4 ВОДОРОД

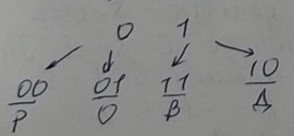
1) закодировав букву Р одним нулем, получаем:



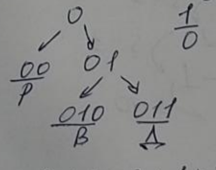
(Используем наименьшую возможн. длину для наиболее часто употребимых букв)

$3+2+3+2+1+2+3 = 16$ – длина цепочки

2) закодировав Р двумя нулями, получаем

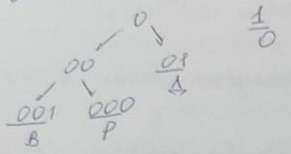


$7 \cdot 2 = 14$ – длина цепочки



$3+1+3+1+2+1+3 = 14$ – длина

3) закодировав P 3 нулями, получим:

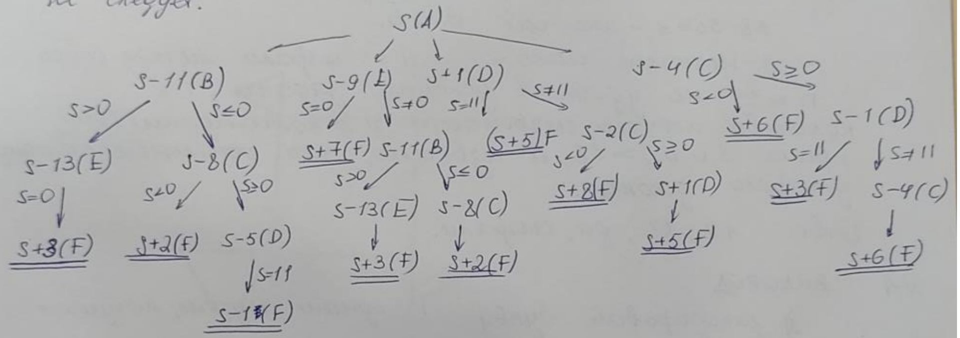


$3+1+2+1+3+1+2 = 13$ – длина ц.

~~Нал~~ Большее количество нулей кодирует больше, чем 4 буквы ⇒ наименьшая длина цепочки уже найдена.

Ответ: 0011011000101.

5. Рассмотрим возможные пути. Заметим также, что многочисл. переход из B в E и обратно дает отриц. прирост, а из D в C и обратно — не дает прироста вообще, так что эти варианты рассматривать не следует.



Из дерева видно, что наибольший возможный прирост — $S+8$ (т.е. на 8 денежных единиц). Путь, по которому нужно пройти: A – D – C – F.

Найдем начальное и конечное S (максимально возможное)

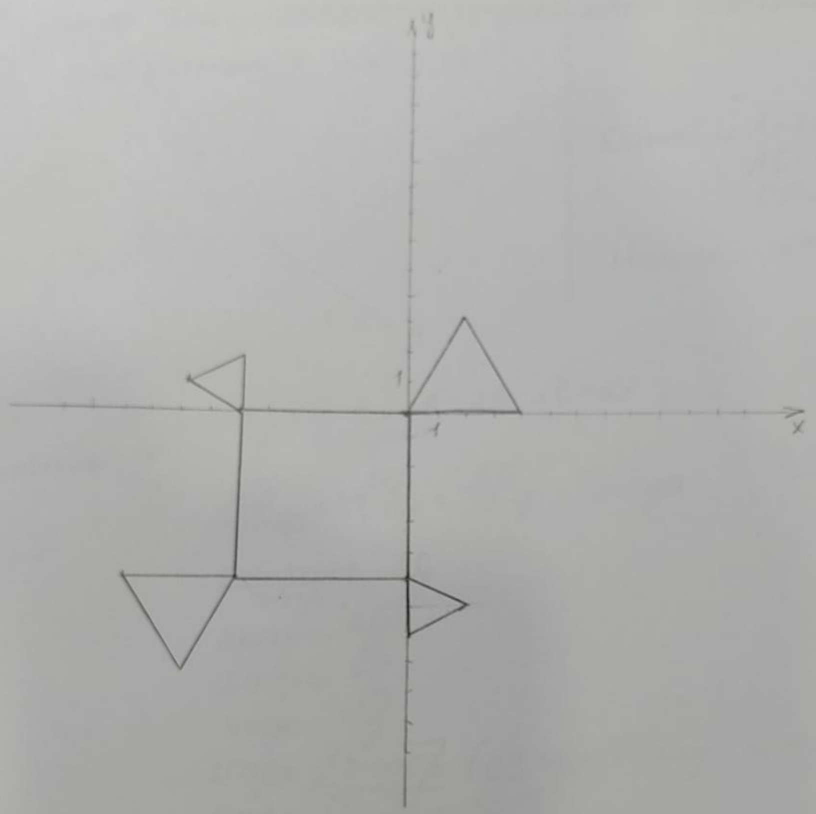
$A - S=1$ ⟶ $S+1$
$D-(S\neq 11)$ $S=2$ ⟶ $S-3$
$C-(S<0)$ $S=-1$ ⟶ $S+10$
$F - S=9$

Последнее условие – $S<0$ ⇒ в городе C $S=-1$. Тогда конечная сумма в F – 9
Сумма в $D = -1+3 = 2$
Сумма в $A = 1$

Таким образом, начальная $S=1$, конечная – 9. Заметим также, что условиям прохождения по пути ADCF соответствуют любые $S \leq 1$, тогда конечная сумма – $S+8$

Ответ: ADCF, $S_{нач.} = 1$, $S_{кон.} = 9$.

6\. Отметим: • возьмем за точку старта точку (0;0).
• поворот пера трижды на 120° в команде Linecycle (a+b, 120, 3) чертит прямоугольный равносторонний Δ со стороной a+b (углы этого треугольн. = 180°-120°=60°), а команда lines (0,30) поворачивает перо на 30°, возвращая его в вертикальное положение (или горизонтальное)



1 итерация цикла cycle 6:

- равност. Δ со стороной 1+3=4
- отрезок (0;0) - (0;-6), перо вниз
- b=-1

2 итерация:

- равност. Δ со стр. 3-1=2
- отрезок (0;-6)- (-6;-6), перо влево
- b=1

3 итерация:

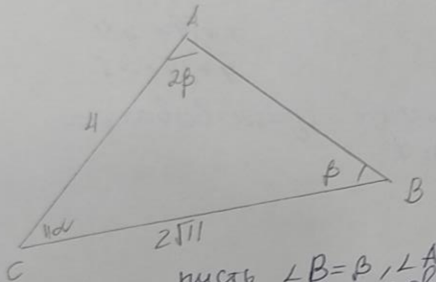
- Δ со стор. 3+1=4
- отрезок (-6,-6)-(-6,0), перо вверх
- b=-1

4 итерация:

- Δ со стороной $3-1=2$
- отрезок $(-6;0)-(0;0)$, перо вправо
- $b=1$.

На 4 итерации все параметры (направление пера, значения a и b, точка начала выполнения цикла) приходят в первоначальное положение $\Rightarrow$ рисунок будет повторять сам себя при дальнейших итерациях. Результат выполнения программы Main() представлен на координатной плоскости

3.



Дано: $\angle A = 2\angle B$
$AC = 4$
$CB = 2\sqrt{11}$

Найти: AB - ?

пусть $\angle B = \beta$, $\angle A = 2\beta$, $\angle C = \alpha$

Решение: • по т. синусов:

$$\frac{CB}{\sin 2\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}$$, тогда $$\frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{CB}{AC}$$

$$\frac{2\cancel{\sin\beta}\cos\beta}{\cancel{\sin\beta}} = \frac{CB}{AC}$$

$$2\cos\beta = \frac{2\sqrt{11}}{4}$$

$$2\cos\beta = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$ (по основному тождеству)

$$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AC \cdot 4}{\sqrt{5}} = \frac{4\cdot 4}{\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \frac{16\sin\alpha}{\sqrt{5}}$$

• $\sin\alpha = \sin(180-\beta-2\beta) = \sin(180-3\beta)$
по формулам приведения
$\sin\alpha = \sin 3\beta$
($\cancel{3\beta > 90}$, а $\sin$ в верхней части числ. окр. всегда > 0)

$$AB = \frac{16\sin 3\beta}{\sqrt{5}}$$

• по т. косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot CB \cdot \cos\beta$$

$$16 = AB^2 + 44 - 2AB \cdot 2\sqrt{11} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$16 = AB^2 + 44 - \frac{\cancel{4}AB \cdot 11}{\cancel{4}}$$

$$16 = AB^2 + 44 - 11AB$$

$$AB^2 - 11AB + 28 = 0$$

$$D = 121 - 112 = 9$$

$$AB_1 = \frac{11+3}{2} = 7$$

$$AB_2 = \frac{11-3}{2} = 4$$

• проверим значения AB по неравенству Δ:

$AB = 4$: $8 > \sqrt{44}$, $4 + \sqrt{44} > 4$

$AB = 7$: $11 > \sqrt{44}$, $7 + \sqrt{44} > 4$, $4 + \sqrt{44} > 7$

Оба треугольника могут существовать $\Rightarrow$ $AB = 4$ или $AB = 7$

Ответ: $AB = 4$ или $AB = 7$.