Шифр

Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

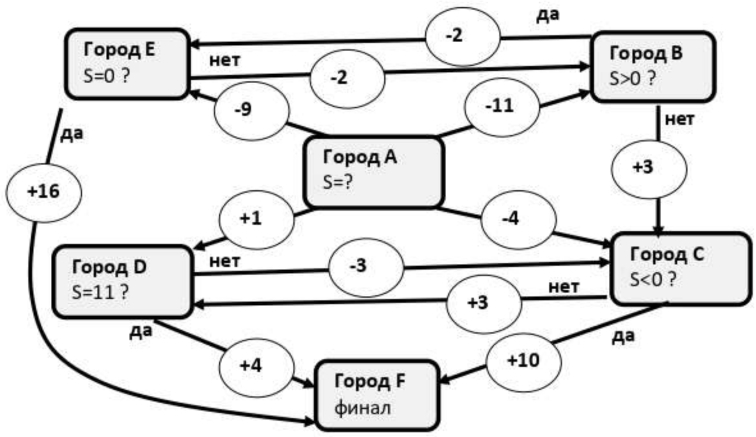
Информационно - технологическое направление

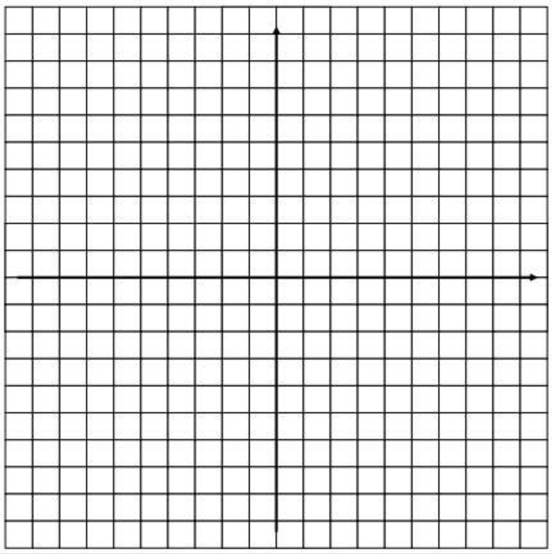
Заключительный этап 2021 г.

Вариант 2

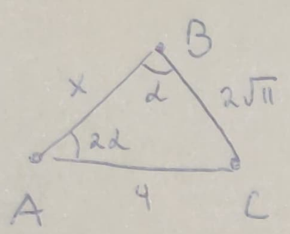
11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Дан многочлен тринадцатой степени с целочисленными коэффициентами. Известно, что при пяти различных целочисленных значениях аргумента он равен 11. Может ли этот многочлен иметь целочисленные корни? Ответ обоснуйте.		10
2	В процессе розыгрыша первенства по футболу каждая команда должна была сыграть по одному разу со всеми остальными. Команды Зеленых и Белых провели одинаковое количество матчей, после чего были сняты с соревнований. Остальные участники первенства доиграли до конца, и в итоге оказалось, что всего сыграно 58 матчей. Каким могло быть общее количество команд, участвовавших в розыгрыше, и успели ли Зеленые и Белые сыграть между собой? Дайте аргументированный ответ.		15
3	В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B, $AC = 4$ и $BC = 2\sqrt{11}$. Найдите AB.		25
4	Закодируйте слово ВОДОРОД, если известно, что для его кодирования выбран код переменной длины таким образом, что слово занимает минимально возможное количество символов, кодирование и декодирование производится с начала кодовой последовательности и для кодирования буквы Р использованы только нули.		10
5	Путешественник начинает свой путь в городе А, имея на своем банковском счету некоторое количество монет S. Сумма на счету – целое число, как положительное, так и отрицательное. Идти из города А он может в любом направлении. Каждая дорога увеличивает или уменьшает имеющуюся у него сумму денег. В следующем городе стражники отправляют путешественника далее в зависимости от того, сколько у него денег в настоящее время. При какой исходной сумме путешественник сможет максимально увеличить сумму на счету к концу маршрута (в городе F) относительно начальной? Каким путем это достигается? Сколько денег на счету будет у путешественника в конце пути в этом случае? Решение должно объяснять Ваш ответ и описывать путь путешественника, который обеспечит максимальный <u>прирост</u> суммы денег на счету в финальном городе. Ответ должен содержать исходное значение, путь (как цепочку городов) и сумму в итоге.		20

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>Робот Отрезок имеет возможность рисовать любые фигуры, состоящие из линий с помощью команды lines(a,u). По команде lines(a,u) Отрезок рисует отрезок длиной a, и поворачивает перо на угол u градусов против часовой стрелки.
Например, команда lines(5, 45) приведет к рисованию линии и повороту пера:


Команда cycle k (<список команд>) позволяет повторять список команд, указанный в скобках k раз.
Отрезок умеет работать с целочисленными переменными. Определение и изменение значений переменных реализуется командой присвоения «=»; например, для переменной s
s=<новое значение s>, при этом новое значение переменной может быть как числовым значением, так и арифметическим выражением с использованием классических символов «+», «-», «/», «*».
Программы и подпрограммы Отрезка оформляются как <Имя программы / подпрограммы > (Список параметров для запуска) {Команды}, например Main (){}.
Изобразите, что нарисует Отрезок при запуске программы Main():
Linecycle(d, z, t)
{
cycle t (lines(d, z))
}
Main ()
{
a = 3
b = 1
cycle 6 (
Linecycle(a + b, 120, 3)
lines(0, 30)
lines(a*2, 30)
b = -b
)
}
</td>
<td></td>
<td>20</td>
</tr>
</table>

Задание 3



Найти: AB

Решение:

1) По теореме синусов:

$$\frac{4}{\sin(\alpha)} = \frac{2\sqrt{11}}{\sin(2\alpha)}$$

$$4 \cdot \sin(2\alpha) = 2\sqrt{11}\sin(\alpha)$$

$$8\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2\sqrt{11}\sin(\alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

2) По теореме косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\alpha)$$

$$16 = x^2 + 44 - 4\sqrt{11} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{11}}{4}$$

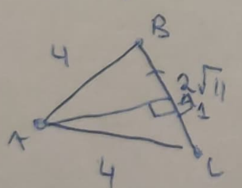
$$x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 28 = 121 - 112 = 9, \sqrt{D} = 3$$

$$x_1 = \frac{11+3}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{11-3}{2} = 4$$

3) Проверим $x=4$:



1. $AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ – р/б $\Rightarrow AA_1$ – высота, медиана, биссектриса $\Rightarrow BA_1 = \sqrt{11}$; $\angle BAA_1 = \angle A_1AC$

2. $\cancel{BA_1 \ne \sqrt{11}}$ $\angle BAC = 2\angle ABC \Rightarrow \angle BAA_1 = \angle ABC \Rightarrow \triangle ABA_1$ – р/б $\Rightarrow$
$\Rightarrow BA_1 = AA_1$

3. По т. Пифагора: $AB^2 = AA_1^2 + BA_1^2$

$$16 = AA_1^2 + 11$$

$$AA_1^2 = 5$$

$$AA_1 = \sqrt{5}$$

4. из (2) и (3) противоречие $\Rightarrow x=4$ не подходит

Ответ: 7

№4

ВОДОРОД

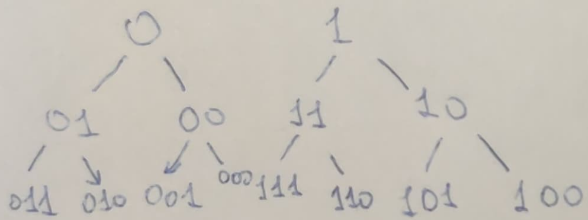
О×3

Д×2

Р×1

В×1

Код переменной длины, декодируется одним способом -> работает условие Фано:



Для максимальной краткости кода, нужно разделить буквы О, Д, Р, В по двум древам, чтобы на каждом из них сумма количеств этих букв в слове была наиболее близкой =>

О	Д Р В
3	2 1 1
3	4

=> Д, Р, В идут на древо, исходящее из 0, О=1

Аналогично для Д, Р, В

Д	Р В
2	1 1
2	2

-> Д = 01, Р,В на древе, из 00 =>

=> Р = 000, В = 001

Ответ:

ВОДОРОД = 0011011000101

N5

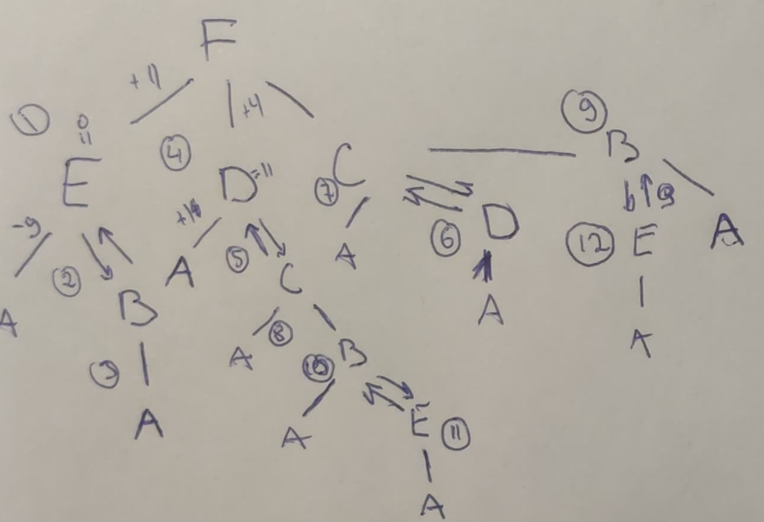
~~F = МАКС(E+16, D+14, C+10)~~

F

~~F = 16 (из E, S=0)~~

~~F = 15 (из D, S=11)~~ $\Leftrightarrow$

F < 10 (из C, S<0)



1. $A \to E \to F$ – при $A = 9$, прирост $= 7$
2. $A \to E \rightleftarrows B \to F$ при $A = 13 + 2k$, Прирост $= 3 - 4k$, $k \geq 0$
3. $A \to B \rightleftarrows E \to F$ при $A = 13 + 2k$
4. $A \to D \to F$ при $A = 10$, Прирост $= 5$
5. $A \to D \rightleftarrows C$ F ~~при~~ невозможен, бесконечный цикл
6. $A \to D \to C \to F$ При $A \in [-\infty; 1)$, Прирост $= \cancel{12}\ 9$
7. $A \to C \to F$ При $A < 4$, Прирост $= 6$
8. $A \to C \to D \to F$ При $A = 12$, Прирост $= 3$
9. $A \to B \to C \to F$ При $A < 9$, Прирост $= 2$

(10) $A \to B \to C \to D \to F$ невозможно

(11) $A \to E \rightleftarrows B \to C \to D \to F$ невозможно

(12) $A \to E \rightleftarrows B \to C \to F$ При

$$\left[\begin{array}{l} A = 2k, \text{ при } k \geq 6 \\ A = k \text{ при } k \leq 5 \end{array}\right.$$

Прирост = 2

(13) $A \to B \rightleftarrows E\ C \to F$

При $A = 12 + 2k$, Прирост = 2

Остальные случаи, аналогично (5) ведут в вечный цикл

Получается, что Вариант (6) наиболее прибыльный

при $S \in [-\infty; 1]$

путь: $A \xrightarrow{+1} D \xrightarrow{-3} C \xrightarrow{+10} F$

В конце пути путешественник будет иметь $S+8$

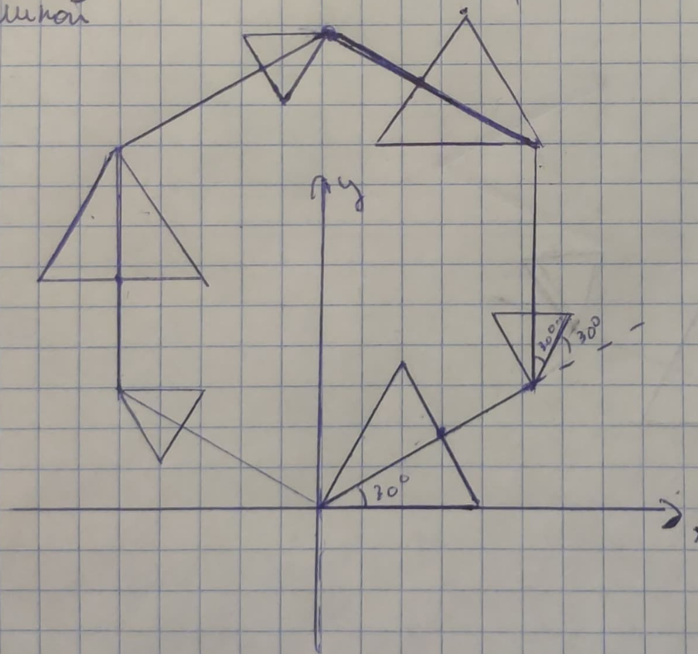
Задача 6

Рисунок получится такой, как показано ниже, так как:

1) Line cycle (a+b; 120; 3) рисует равнобедренный треугольник, не меняя конечное положение и поворот черепашки

2) потом мы поворачиваемся на 30°, едем вперёд 6, снова поворачиваемся на 30°

3) таким образом, пройдясь 6 раз, мы начертим правильный шестиугольник и 6 треугольников с перед. длиной



Задание 2

Если все команды должны были сыграть со всеми, то количество матчей было бы

$$\underbrace{(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-\dots)+1}_{n-1} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$ матчей. При таком раскладе

может получиться две ситуации: всего было чётное или нечётное количество матчей

① $\frac{n(n-1)}{2}$ - чётное: при $n = 4k$:

так как число матчей, которые сыграли и число матчей вообще - чётное, то количество пропущенных матчей тоже чётное => команды друг с другом не играли

② $\frac{n(n-1)}{2}$ - нечётное, при $n \neq 4k$:

так как число сыгранных матчей чётное, а число вообще нечётное, то команды должны были друг с другом сыграть

3) $$\begin{cases} \frac{n(n-1)}{2} \geq 58 \\ \frac{n(n-1)}{2} - 58 \leq \underbrace{2(n-2)+1}_{\text{количество матчей, которые могли бы сыграть две команды}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2-n-116 \geq 0 \quad (1) \\ n^2-n-116 \leq 4n-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 12 \\ n \leq 13 \end{cases}$$

(1) $n^2-n-116 \geq 0$

$D = 1+4\cdot116 = 465$, $\sqrt{D} = 21.56$

$n_1 = \frac{1+21,56}{2} = 11,28$

$n_2 = \frac{1-21,56}{2}$ - не имеет смысла

$-$ $+$

11,28

целочисл. решения:

$n \in [12; +\infty)$

(2) $n^2-5n-114 \leq 0$

$D = 25+456 = 481$, $\sqrt{D} = 21,93$

$n_1 = \frac{5+21,93}{2} = 13,46$

$n_2 = \frac{5-21,93}{2}$ - не имеет смысла

$-$ $+$

13,46

Ответ: Если 12 команд, то не сыграли если 13, то сыграли

~~Ответ: 12 или 13 команд, сыграли друг с другом~~