



## Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 3

11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Найдите остаток от деления числа $2023^{2022} + 2025^{2022}$ на 2024.		15
2	Построены 4 круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. При этом внутри квадрата образуется фигура, содержащая площадь пересечения всех этих кругов, и «лепестки» от попарного пересечения кругов. Найдите площадь всех «лепестков».		20
3	Решите систему уравнений $\begin{cases} 5 x-2  + 4 y+3  = 20 \\ 2 x-6  +  y+1  = 2 \end{cases}$		25
4	Сосуд объемом $V_1 = 20$ л содержит одноатомный идеальный газ массой $m_1 = 200$ г и молярной массой $M = 20$ г/моль при температуре $T_1 = 150$ К, а сосуд объемом $V_2 = 30$ л – содержит тот же газ массой $m_2 = 350$ г при температуре $T_2 = 200$ К. Сосуды соединяют трубкой. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом с окружающей средой, найти установившееся в сосудах давление $p$ . Считать универсальную газовую постоянную $R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ . Ответ дать в кПа.		15
5	Два покоящихся на горизонтальном гладком столе шарика массами $m_1 = 20$ г и $m_2 = 30$ соединены недеформированной пружиной длиной $l = 20$ см. В шарик $m_1$ попадает пуля массой $m_0 = 10$ г, летящая горизонтально вдоль соединяющей шарик линии и застревает в нем. Найти минимальную длину сжатой пружины при последующем движении шариков, если жесткость пружины $k = 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ . Ответ дать в см.		25

1] Запишем 2024 на  $n$ , тогда:

$$(n-1)^{n-2} + (n+1)^{n-2} / n \quad (1)$$

Вспользуемся биномиальной теоремой и выведем, как расставл. знаки:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1-1-1 \\ 1-2+1 \\ 1-3+3-1 \\ 1-4+6-4+1 \\ 1-5+10-10+5-1 \end{array}$$

На всех четных  $n$  в случае степени разности последнее число будет отриц., что значит, что 1 из формулы (1) уйдет. На примере 3 степени:

$$[ \cancel{n^3} - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 2n^3 + 6n ]$$

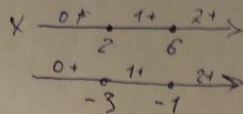
Тогда, как у всех четных  $n$ , единицы сложатся, на примере 2 степени:

$$[ n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2 ]$$

Наше  $n$ -летие (2024), значит эта сумма 2 останется и станет остатком от деления, т.к. во все другие слагаемые будет входить  $n$  в какой-либо степени.

Ответ: 2.

$$3. \begin{cases} |x-2| + 4|y+3| = 20 \\ |2|x-6| + |y+1| = 2 \end{cases}$$



1)  $x \geq 6$  u  $y \geq -1$ :  $\begin{cases} 5x-10+4y+12=20 \\ 2x-12+y+1=2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 5x+4y=18 \\ 2x+y=13 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x = \frac{34}{3} \approx 11,33 \\ y = \frac{20}{3} \approx 6,66 \end{cases}$

2)  $x \geq 6$  u  $-3 \leq y < -1$ :  $\begin{cases} 5x-10+4y+12=20 \\ 2x-12-y-1=2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 5x+4y=18 \\ 2x-y=15 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x=6 \\ y=-3 \end{cases}$

3)  $x \geq 6$  u  $y < -3$ :  $\begin{cases} 5x-10-4y-12=20 \\ 2x-12-y-1=2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 5x-4y=42 \\ 2x-y=15 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x=6 \\ y=-3 \end{cases}$

4)  $x < 2$  u  $y \geq -1$ :  $\begin{cases} 5x-10+4y+12=20 \\ -2x+12+y+1=2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 5x+4y=18 \\ -2x+y=-11 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x = \frac{62}{13} \approx 4,76 \\ y = -\frac{20}{13} \approx -1,48 \end{cases}$

5)  $2 \leq x < 6$  u  $-3 \leq y < -1$ :  $\begin{cases} 5x-10+4y+12=20 \\ -2x+12-y-1=2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 5x+4y=18 \\ 2x+y=9 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

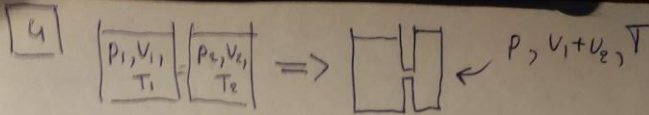
6)  $2 \leq x < 6$  u  $y < -3$ :  $\begin{cases} 5x-10-4y-12=20 \\ -2x+12-y-1=2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 5x-4y=42 \\ 2x+y=9 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x=6 \\ y=-3 \end{cases}$

7)  $x < 2$  u  $y \geq -1$ :  $\begin{cases} -5x+10+4y+12=20 \\ -2x+12+y+1=2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} -5x+4y=-2 \\ -2x+y=-11 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x = \frac{14}{3} \\ y = \frac{20}{3} \end{cases}$

8)  $x < 2$  u  $-3 \leq y < -1$ :  $\begin{cases} -5x+10+4y+12=20 \\ -2x+12-y-1=2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} -5x+4y=-2 \\ 2x+y=9 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x = \frac{38}{13} \\ y = \frac{21}{13} \approx 1,61 \end{cases}$

9)  $x < 2$  u  $y < -3$ :  $\begin{cases} -5x+10-4y-12=20 \\ -2x+12-y-1=2 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} -5x+4y=-22 \\ 2x+y=9 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x = \frac{49}{3} \\ y = -\frac{29}{3} \end{cases}$

Ombem:  $x=6$  u  $y=-3$



вариант 3

$$U_{общ} = U_1 + U_2$$

$$\frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} \nu_1 RT_1 + \frac{3}{2} \nu_2 RT_2 \Rightarrow pV = \nu_1 RT_1 + \nu_2 RT_2$$

$$p = \frac{\frac{m_1}{M} \cdot R \cdot T_1 + \frac{m_2}{M} \cdot R \cdot T_2}{V_1 + V_2} = \frac{R}{M} (m_1 T_1 + m_2 T_2) = \frac{8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{20 \frac{\text{г}}{\text{моль}}} \cdot (2002 \cdot 150 \text{К} + 302 \cdot 100 \text{К})$$

$$= 830000 \text{ Па} = 830 \text{ кПа}$$

Ответ: 830 кПа



(Импульс передается первой шарике, а не системе, т.к. второй шарик закреплён через пружинку, но её в единицы телом они не являются).

$$mV = (m_1 + m)u \Rightarrow u = V \cdot \frac{m}{m + m_1} = \frac{102}{102 + 202} \cdot V = \frac{1}{3}V$$

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{(m + m_1)u^2}{2} + \frac{k\Delta x^2}{2} \quad | \quad m + m_1 + m_2 = 102 + 202 + 302 = 602 = 6m$$

$$k\Delta x^2 = mV^2 - 6m \cdot \frac{1}{9}V^2 = \frac{1}{3}mV^2$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{mV^2}{k}} \Rightarrow l_{min} = l - \sqrt{\frac{mV^2}{3k}} = 20 \text{ см} - \sqrt{\frac{102 \cdot 102 \cdot V^2}{3 \cdot 4000 \frac{\text{Дж}}{\text{м}}}}$$

Ответ:  $20 \text{ см} - \sqrt{\frac{0,102 \cdot 102 \cdot V^2}{3 \cdot 4000 \frac{\text{Дж}}{\text{м}}}} / 100$  (V не дан :)