Шифр

Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 4

10 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Найдите сумму $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+.....+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$		15
2	В прямоугольник со сторонами 4 и 5 вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 1:4. Найдите стороны вписанного прямоугольника.		20
3	Найдите остаток от деления числа $2027^{2022}+2029^{2022}$ на 2028.		25
4	На какое максимальное расстояние S человек может отойти от забора высотой $\mathrm{H}=4$ м, если бросок камня производится с высоты $h=2$ м от поверхности земли со скоростью $V_0=5$ м/с под углом $\alpha=60^\circ$ к горизонту, а траектория движения камня должна пройти через верхнюю точку забора? Ускорение свободного падения принять $g=10$ м/с^2.		15
5	Из куска однородной проволоки изготовлен замкнутый контур, имеющий форму квадрата $ABCD$. К вершинам квадрата A и B подводят напряжение U, а затем то же самое напряжение U подводят к вершинам A и C. Во сколько раз ток, текущий через сторону AB, в первом случае отличается от тока, текущего через сторону AB, во втором?		25

№1

(1)

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}} = ?$$

Возьмем и рассмотрим первую дробь:

$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}$, теперь избавимся от иррациональности в знаменателе путем умножения дроби на сопряженное выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1}+\sqrt{2})(\sqrt{1}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{((\sqrt{1})^2-(\sqrt{2})^2)} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1};$$

Проделаем тоже самое со 2 дробью:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1}$$

Сложим первые 2 дроби:

$$-\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1} = -\left(\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1}\right) = -\left(\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{1}\right)$$

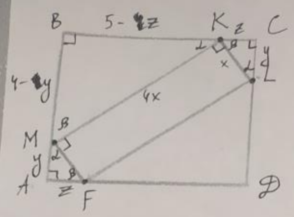
Тогда, если мы продолжим данный алгоритм, то в результате все иррациональные значение будут взаимносокращаться*, тогда в результате останется:

$$-\left(\frac{\sqrt{1}-\sqrt{121}}{1}\right), \quad ^{*}\text{т.к.} \; -\left(\frac{\sqrt{1}-\underline{\sqrt{2}}+\underline{\sqrt{2}}-\underline{\underline{\sqrt{3}}}+\underline{\underline{\sqrt{3}}}-\sqrt{4}+\ldots-\sqrt{121}}{1}\right)$$

Тогда их сумма равна $-\left(\frac{1-11}{1}\right) = -(-10) = 10$

Ответ: 10

№ 2



Дано:
$AB = 4$
$BC = 5$
$ABCD$ - прям/уг.
$KL : MK = 1 : 4$
$MKLF$ - прям/уг.
Найти: KL - ?
MK - ?

Решение:

1. Пусть $KL = x$, тогда $MK = 4x$
2. Т.к. $ABCD$ - прям/уг, то $\angle C = 90^\circ$, тогда $\triangle KCL$ - прям/уг.
3. Пусть $\angle KLC = \alpha$, тогда $\angle CKL = 90 - \alpha = \beta$
4. Т.к. $MKLF$ - прям/уг, то $\angle K = 90^\circ$ и $\angle M = 90^\circ$
5. Тогда $\angle MKB = 180 - \angle CKL - 90 = 180 - 90 - \beta = 90 - \beta = \alpha$
6. Тогда $\angle BMK = 90 - \alpha = \beta$
7. $\angle AMF = 180 - \angle M - \angle BMK$, $\angle M = 90^\circ$, т.к. $MKLF$ - прям/уг.
$\angle AMF = 180 - \beta - 90 = 90 - \beta = \alpha$
8. $\angle A = 90^\circ$, т.к. $ABCD$ - прям/уг, тогда $\triangle AMF$ - прям/уг.
$\angle AFM = 90 - \angle AMF = 90 - \alpha = \beta$
9. $\triangle AMF = \triangle CLK$ по I признаку, т.к. $KL = MF = x$, как стороны прям/уг. и $\angle\alpha = \angle\alpha$, $\angle\beta = \angle\beta$.
10. Пусть $CL = y = AM$ (т.к. $\triangle AMF = \triangle CLK$) и $KC = z = AF$ (т.к. $\triangle AMF = \triangle CLK$).
11. Тогда, т.к. $BC = 5$, $BK = 5 - z$, и т.к. $AB = 4$, то $BM = 4 - y$.

12. Составим систему ур-ний: ③

$$\begin{cases} (4-y)^2+(5-z)^2=(4x)^2 & \text{– по т. Пифагора для } \triangle BMK \\ y^2+z^2=x^2 & \text{– по т. Пифагора для } \triangle AMF \end{cases}$$

13. $\triangle BMK \sim \triangle CKL$ по I признаку подобия ($\angle\alpha=\angle\alpha$ и $\angle\beta=\angle\beta$).

14. Тогда $\frac{MK}{KL}=\frac{4x}{x}=\frac{4}{1}=k$

15. Тогда $\frac{BK}{CL}=\frac{4}{1}=\frac{5-z}{y}=\frac{4}{1} \longrightarrow 4y=5-z$

16. Тогда: $\begin{cases} (4-y)^2+(5-z)^2=(4x)^2 \\ y^2+z^2=x^2 \\ z=5-4y \end{cases}$

1) $y^2+(5-4y)^2=x^2$

$y^2+25+16y^2-40y=x^2$

$17y^2-40y+25=x^2$

2) $(4-y)^2+(5-z)^2=16x^2$

$16-8y+y^2+(5-5+4y)^2=16(17y^2-40y+25)$

$17y^2-8y+16=272y^2-640y+400$

$255y^2-632y+384=0$

$D=399424-391680=7744=88^2$

$y_{1,2}=\frac{632\pm88}{510}=\frac{720}{510};\ \frac{544}{510}$

I. Если $y=\frac{72}{51}$: $z=5-\frac{288}{51}=-\frac{33}{51}$, $z \ngeq 0$, не подходит.

II. Если $y=\frac{544}{510}$: $z=5-\frac{2176}{510}=\frac{374}{510}$, $z\geq0$, подходит.

Тогда $x=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{\frac{295936+139876}{260100}}=1,3$

$4x=5,2$

Ответ: 1,3; 5,2.

№3 (4)

$2027^{2022} + 2029^{2022} : 2028 = \dots$ ост. x

$x - ?$

Рассмотрим первое число 2027^{2022}.

$2027^{2022} = (2028-1)^{2022} = ((2028-1)^2)^{1011}$;

Раскроем квадрат разности:

$(2028-1)^2 = 2028^2 - 2\cdot 2028 \cdot 1 + 1^2 = 2028^2 - 2\cdot 2028 + 1 =$

$= 2028(2028-2)+1 = 2028\cdot 2026 + 1$

Итак, рассмотрим данное число:

$2028\cdot 2026+1$, $2028\cdot 2026 : 2028$, т.к. в произведении присутствует множитель 2028.

$1 \not\vdots 2028$, при делении остаток будет 1.

Тогда представим выражение в дробном виде:

$$\frac{2028\cdot 2026+1}{2028} = \frac{2028\cdot 2026}{2028} + \frac{1}{2028} = 2026 + \frac{1}{2028}$$

Тогда остаток от деления $2028\cdot 2026$ на 2028 равен 0, а остаток от деления 1 на 2028 равен 1, тогда суммарный остаток равен 1

Т.е. $2028\cdot 2026+1 : 2028 = \dots$ ост. 1.

При возведении в степень данного числа остаток от деления всегда будет 1, т.к. 1 в любой степени – это 1.

Рассмотрим второе число 2029^{2022}.

$2029^{2022} = (2028+1)^{2022} = ((2028+1)^2)^{1011} = (2028^2 + 2\cdot 2028 + 1)^{1011}$

Тогда рассмотрим число основание степени:

$2028^2 + 2\cdot 2028 + 1 = 2028(2028+2)+1 = 2028\cdot 2030 + 1$

Тогда найдем остаток от деления данного числа на 2028:

5

$$\frac{2028 \cdot 2030 + 1}{2028} = \frac{2028 \cdot 2030}{2028} + \frac{1}{2028} = 2030 + \frac{1}{2028};$$

При делении $2028 \cdot 2030$ на 2028 остаток от деления равен 0, т.к. в произведении есть множитель, кратный 2028.

При делении 1 на 2028 остаток от деления равен 1.

Тогда суммарный остаток $0+1=1$

При возведении в степень числа остаток от деления на 2028 всегда равен 1, т.к. 1 в любой степени - это 1.

Итого имеем:

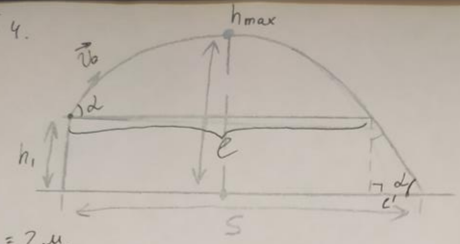
1) Остаток от деления 2027^{2022} на $2028 = 1$

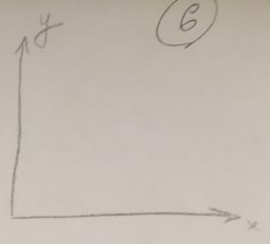
2) Остаток от деления 2029^{2022} на $2028 = 1$

Тогда их суммарный остаток: $1+1=2$

Ответ: 2

№ 4. 6





$h_1 = 2$ м.

$h_{max} = 4$ м.

$V_0 = 5$ м/с

$\alpha = 60°$

$g = 10$ м/с^2

S - ?

Решение:

Движение по оси Ox: $x = V_x t = V_0 \cos\alpha \cdot t$

Движение равномерное

Движение по оси Oy: $y = V_y t - \frac{gt^2}{2}$;

Движение с ускорением.

$V_x = V_0 \cos\alpha$

$V_y = V_0 \sin\alpha - gt$

В h_{max} $V_y = 0$, тогда: $0 = V_0 \sin\alpha - gt$

$t = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$ – время подъема камня.

Время подъема и время спуска одинаково*, тогда

$t_{полета} = 2t = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$, *т.к. движение камня по параболе.

$t_{п.} = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$, тогда найдем дальность полета:

$l = v_0 \cos\alpha \cdot t_п = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ 7

$l = \frac{25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = \frac{25 \cdot 1,73}{20} \approx 2,16$ м.

$S = l + l'$, найдем l':

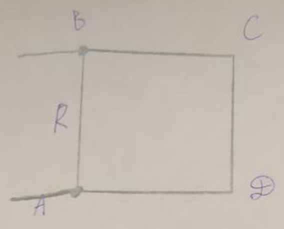
В прямоугольном треу-ке: $tg\,\alpha = \frac{h_1}{l'} \rightarrow l' = \frac{h_1}{tg\,\alpha}$

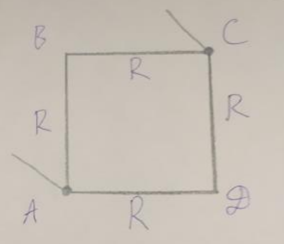
$l' = \frac{2}{tg\,60} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,16$ м.

Тогда $S = l + l' = 3,32$ м.

Ответ: 3,32 м.

№5. 8





Дано:
U

$\frac{I_1}{I_2}$ - ?

Решение:
Пусть сопротивление каждого уч-ка R
Тогда в 1 ~~[illegible]~~ случае $I_1 = \frac{U}{R}$
В 2 случае $R_{AC} = R + R = 2R$
Тогда $I_{AC} = \frac{U_{AC}}{2R}$
Т.к. соединение последовательное, то:
$I_{AB} = I_{BC} = I_{AC}$, тогда $I_{AB} = \frac{U}{2R}$
$U_{AB} + U_{BC} = U_{AC}$

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U}{R} \cdot \frac{2R}{U} = \frac{2}{1}$

Ответ: в 2 раза уменьшится