Шифр

Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 2

9 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Вычислите без калькулятора: $\sqrt{2020\cdot 2021\cdot 2022\cdot 2023+1}$		15
2	Найдите сумму $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+.....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$		20
3	В прямоугольник со сторонами 4 и 5 вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 1:3. Найдите стороны вписанного прямоугольника		25
4	Тело бросили вертикально вверх со скоростью $V_0 = 34$ м/с. Найти путь, пройденный телом за четвертую секунду движения. Считать ускорение свободного падения $g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.		15
5	Из куска однородной проволоки изготовлен замкнутый контур, имеющий форму квадрата *ABCD* с диагональю *AC*. К вершинам квадрата *A* и *C* подводят напряжение. Во сколько раз ток, текущий через сторону *AB*, отличается от тока, текущего через диагональ *AC*?		25

(1) Найдём значение выражения (от n): $\sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2)+1}$.

$$\sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2)+1} = \sqrt{(n-1)(n+1)\cdot n(n+2)+1} = \sqrt{(n^2-1)\cdot((n+1)^2-1)+1} =$$

$$= \sqrt{(n^2-1)\cdot(n^2+2n)+1} = \sqrt{n^4+2n^3-n^2-2n+1}.$$

Проверим, что $(n^2+n-1)^2 = n^4+2n^3-n^2-2n+1$:

$$(n^2+n-1)(n^2+n-1) = (n^4+n^3-n^2)+(n^3+\cancel{n^2}-n)+(-\cancel{n^2}-n+1) = n^4+2n^3-n^2-2n+1.$$

Тогда $\sqrt{n^4+2n^3-n^2-2n+1} = \sqrt{(n^2+n-1)^2} = |n^2+n-1|$.

В исходной задаче рассмотрен случай $n=2021$.

$$\sqrt{2020\cdot 2021\cdot 2022\cdot 2023+1} = \left|2021^2+2021-1\right| = 2021\cdot 2022-1 \;=$$

$$\begin{array}{r} \cdot\; 2021 \\ 2022 \\ \hline 4042 \\ 4042 \\ 4042 \\ \hline 4086462 \end{array} \Rightarrow \quad = 4086461.$$

Ответ: 4086461

2

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}-\sqrt{1})(\sqrt{2}+\sqrt{1})}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\ldots+\frac{\sqrt{81}-\sqrt{80}}{(\sqrt{81}-\sqrt{80})(\sqrt{81}+\sqrt{80})}=$$

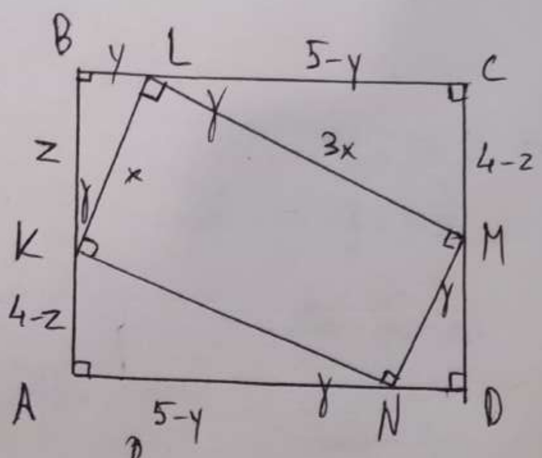
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{81}-\sqrt{80}}{81-80}=$$

$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{2}})+\ldots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})=$$

$$=\sqrt{81}-\sqrt{1}=9-1=8.$$

Ответ: 8.

(3)



Дано: $AB = 4$, $BC = 5$

$\frac{KL}{LM} = \frac{1}{3}$.

Найти: KL, LM.

Решение:

Пусть $KL = x$, $LM = 3x$; $BL = y$, $LC = 5-y$; $BK = z$, $KA = 4-z$.

Пусть $\angle BKL = \gamma$. $\angle AKN = 180^\circ - \angle BKL - \angle LKN = 90^\circ - \angle BKL = 90^\circ - \gamma$.

$\angle ANK = 180^\circ - \angle AKN - \angle KAN$ (по Т о сумме углов Δ) $= 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$.

Остальные считаются аналогично, см. рис.

ΔAKN и ΔCML равны по гипотенузе и острому углу ($KN = LM$, $\angle CLM = \angle ANK$, $\angle A = \angle C = 90^\circ$).

$AN = 5-y$, $CM = 4-z$.

Из Т Пифагора: $x^2 = y^2 + z^2$; $(3x)^2 = 9x^2 = (5-y)^2 + (4-z)^2$.

Из подобия по двум углам ΔBKL и ΔANK: $\frac{y}{z} = \frac{4-z}{5-y} \Rightarrow 4-z = \frac{(5-y)y}{z}$ ⇒

$\Rightarrow 9x^2 = (5-y)^2 + \frac{(5-y)^2 y^2}{z^2} = (5-y)^2\left(\frac{y^2+z^2}{z^2}\right) = (5-y)^2\left(\frac{x^2}{z^2}\right)$. ⇒

$\Rightarrow 9 = \frac{(5-y)^2}{z^2}$. $5-y, z > 0$ по геом. смыслу.

$3 = \frac{5-y}{z} =$ (из пропорции) $\frac{4-z}{y} \Rightarrow 3y + z = 4$.

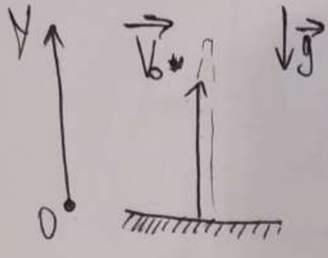
$$\begin{cases} 3z + y = 5 \\ 3y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 4z = 9 \\ 2z - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 4z = 9 \\ 4z - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8z = 11 \\ 8y = 7 \end{cases}$$

$(8x)^2 = (8y)^2 + (8z)^2 = 7^2 + 11^2 = 49 + 121 = 170$.

$8x = \sqrt{170}$; $x = \frac{\sqrt{170}}{8}$; $3x = \frac{3\sqrt{170}}{8}$ $= KL; LM$.

Ответ: $\frac{\sqrt{170}}{8}$; $\frac{3\sqrt{170}}{8}$

④



$V_0 = 34\,\frac{м}{с}$

$g = 10\,\frac{м}{с^2}$

Найти $(S_4 - S_3)$

Четвёртая секунда движения — интервал от $3с$ до $4с$.

$\quad\;\; \| \qquad\quad \|$

$\quad\;\; t_0 \qquad\; t_2$

Решение:

Найдём точку наивысшего подъёма (время, за которое она была достигнута) в ней $V = 0$;

ур-ие проекции скорости (на $\overrightarrow{OY}$):

$$V = V_0 + a_0 t, \text{ где } a_0 = -g.$$

$$0 = V_0 - g t_1;\quad t_1 = \frac{V_0}{g}.\qquad t_1 = 3{,}4с,\quad t_0 < t_1 < t_2.$$

Тогда путь складывается из двух отрезков: на подъёме (S_1) и на спуске (S_2).

В силу обратимости: $S_1 = |\Delta x|_1 = |x_0 - x_1| = \left|V_1 t + \frac{a_0 (t_1 - t_0)^2}{2}\right|$, где (на $\overrightarrow{OY}$):

$V_1 = 0$, $a_0 = -g$

$$S_1 = \left|-g\frac{(t_1 - t_0)^2}{2}\right| = g\frac{\left(\frac{V_0}{g} - t_0\right)^2}{2}.$$

Аналогично $S_2 = g\dfrac{\left(\frac{V_0}{g} - t_2\right)^2}{2}$.

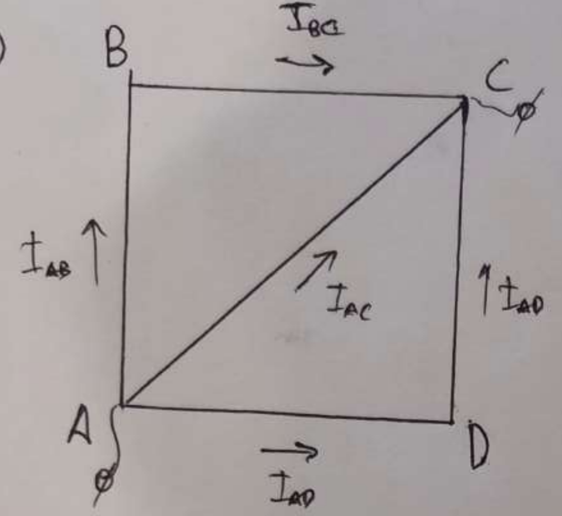
$$S = S_1 + S_2 = \frac{g}{2}\left(\left(\frac{V_0}{g} - t_0\right)^2 + \left(\frac{V_0}{g} - t_2\right)^2\right).$$

Подставляя: $g = 10\,\frac{м}{с^2}$, $V_0 = 34\,\frac{м}{с}$, $t_0 = 3с$, $t_2 = 4с$:

$$S = 5\cdot\left((3{,}4 - 3)^2 + (4 - 3{,}4)^2\right) = 5\cdot(0{,}4^2 + 0{,}6^2) = 5\cdot(0{,}16 + 0{,}36) = \frac{10}{2}\cdot 0{,}52 = 2{,}6\,м$$

Ответ: 2,6 м.

5



$\frac{I_{AB}}{I_{AC}} = ?$

Решение:

проволока однородна $\Rightarrow$ $R_{удел}$ (на единицу длины, $[R_{удел}] = \frac{Ом}{м}$) - const.

Пусть $AB = l$ (м), тогда по Т Пифагора $AC = l \cdot \sqrt{2}$ (м).

$R_{AB} = R_{удел} \cdot l$; $= R_{BC} = R_{AD} = R_{DC}$ (квадрат);

$R_{AC} = R_{удел} \cdot l \cdot \sqrt{2}$;

$R_{ABC} = R_{AB} + R_{BC} = R_{AD} + R_{CD} = R_{ADC} = 2 \cdot R_{удел} \cdot l$

Участки ABC, AC и ADC подключены к одним узлам напряжения, тогда $U_{ABC} = U_{AC} = U_{ADC}$, и по следствию из закона Ома

$R_{ABC} I_{AB} = R_{AC} I_{AC}$;

$$\frac{I_{AB}}{I_{AC}} = \frac{R_{AC}}{R_{ABC}} = \frac{\cancel{R_{удел}} \cdot \cancel{l} \sqrt{2}}{\cancel{R_{удел}} \cdot \cancel{l} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$I_{AB} = \frac{I_{AC}}{\sqrt{2}}$.

Ответ: в $\sqrt{2}$ раз меньше.