Шифр

Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 2

11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Найдите остаток от деления числа $2025^{2022}+2027^{2022}$ на 2026.		15
2	Построены 4 круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. При этом внутри квадрата образуется фигура, содержащая площадь пересечения всех этих кругов, и 4 «лепестка» от попарного пересечения кругов. Найдите площадь одного «лепестка».		20
3	Решите систему уравнений. $\begin{cases} 5\|x-1\|+4\|y-2\|=20 \\ 2\|x+3\|+\|y\|=2 \end{cases}$		25
4	Идеальная тепловая машина совершает с секунду $n=4$ цикла. Температура нагревателя данной машины $T_1=300$ К, температура холодильника $T_2=180$ К, количество теплоты, получаемое от нагревателя за цикл, $Q=200$ Дж. На какое расстояние за время $t_0=3$ с переместится по горизонтальной дороге тележка, приводимая в движение такой машиной, если сила сопротивления $F=48$ Н? Скорость тележки считать постоянной.		15
5	Два шарика массами $m_1=20$ г и $m_2=30$ г покоятся на горизонтальном гладком столе. В шарик m_1 попадает пуля массой $m_0=10$ г, летящая горизонтально со скоростью $V_0=100\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, и застревает в нем. Найти максимальную потенциальную энергию взаимодействия шариков достигаемую в процессе их последующего центрального абсолютно упругого удара.		25

Вариант II

№1

$$\frac{2025^{2022}+2027^{2022}}{2026}=\frac{(2026-1)^{2022}+(2026+1)^{2022}}{2026}=$$

$$=\frac{(2026-1)(2026-1)^{2021}+(2026+1)(2026+1)^{2021}}{2026}=$$

$$=\frac{(2026^2-2\cdot2026+1)\cdot(2026-1)^{2020}}{2026}+\frac{(2026^2+2\cdot2026+1)\cdot(2026+1)^{2020}}{2026}=$$

$$=\frac{(2026-1)^2(2026-1)^{2020}}{2026}+\frac{(2026+1)^2(2026+1)^{2020}}{2026}=$$

$$=\frac{(2026^3-3\cdot2026^2+3\cdot2026-1)\cdot(2026-1)^{2019}}{2026}+$$

$$+\frac{(2026^3+3\cdot2026^2+3\cdot2026+1)(2026+1)^{2019}}{2026}=$$

$$=\frac{2026^{2022}-n\cdot2026^{2021}+m\cdot2026^{2020}\ldots\ldots+1}{2026}+$$

$$+\frac{2026^{2022}+n\cdot2026^{2021}+m\cdot2026^{2026}\ldots+1}{2026}$$

Поделив оба слагаемых почленно мы получим следующее:

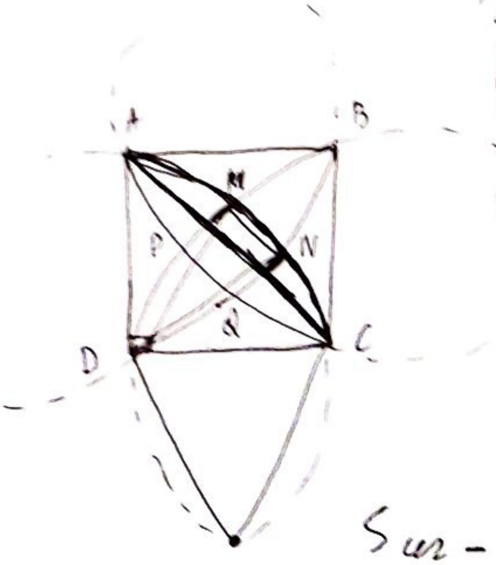
$$2026^{2021} + n \cdot 2026^{2020} + m \cdot 2026^{2019} \dots + \frac{1}{2026} +$$

$$+ 2026^{2021} - n \cdot 2026^{2020} + m \cdot 2026^{2019} \dots + \frac{1}{2026}.$$

Остаток от деления обоих членов равен 1 =>
остаток от деления их суммы равен 2.

$\boxed{\text{Ответ: } 2}$

№2



Пусть сторона квадрата и радиус круга $= r$. Тогда S сектора $ADC = \frac{\pi r^2 \cdot 90}{360} =$

$= \frac{\pi r^2}{4}$; $S_{\triangle ADC}$, $AD = DC = r$; $\angle D = 90°$

$= \frac{r^2}{2}$. Тогда $S_{сект} - S_{\triangle} = S_{сег}$.

$$S_{сег} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{2r^2}{4} =$$

$$= \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4} = \frac{r^2(\pi - 2)}{4}.$$

$S_{сег}$ – это две половины площади лепестка + половина площади внутр. фигуры. $S_{фиг} = ?$

Рассм. $\triangle DMC$: $DM = MC = CD = r \Rightarrow$ это р/с $\triangle$-ик; $\Rightarrow \angle MDC = 60°$.

Рассм. $\triangle AND$: $AN = ND = DA = r \Rightarrow \triangle AND$-р/б; $\angle ADN = 60°$.

$\angle ADC = 90° \Rightarrow$ по (А) сл. углов $\angle MDN = 30°$.

$S_{фиг.}$ состоит из квадрата $MNQP$ и 4-х сегментов.

По Т cos: $MN^2 = MD^2 + ND^2 - 2 \cdot MD \cdot ND \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$MN^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; $MN^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{3}$;

$MN^2 = r^2(2 - \sqrt{3})$. $S_{MNQP} = MN^2 = r^2(2 - \sqrt{3})$.

$S_{сектора\ DMN} = \frac{\pi r^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi r^2}{12}$; $S_{\triangle MDN} = \frac{1}{2} \cdot MD \cdot ND \cdot \sin 30° =$

$= \frac{r^2}{4} \Rightarrow S_{сегмента} = \frac{\pi r^2}{12} - \frac{r^2}{4} = \frac{\pi r^2 - 3r^2}{12} = \frac{r^2(\pi - 3)}{12}.$

Тогда $S_{фиг} = r^2(2-\sqrt{3}) + \frac{r^2(\pi-3)}{12} = \frac{12r^2(2-\sqrt{3}) + r^2(\pi-3)}{12} =$

$= r^2\left(\frac{24-12\sqrt{3}+\pi-3}{12}\right) = r^2\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\right) =$

$= r^2\left(1{,}75-\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow \frac{S_{фиг}}{2} = \frac{r^2}{2}\cdot\left(1{,}75-\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}\right)$

$S_{листика} = S_{сег} - \frac{S_{фиг}}{2} = \frac{r^2(\pi-2)}{4} - \frac{r^2\left(1{,}75-\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}\right)}{2} =$

$= \frac{r^2(\pi-2) - 2r^2\left(1{,}75-\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}\right)}{4} = r^2\left(\frac{\pi-2-3{,}5+2\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}}{4}\right) =$

$= \frac{\frac{7\pi}{6}-5{,}5+2\sqrt{3}}{4}\cdot r^2 \approx \cancel{0{,}4r^2}\ 0{,}407\,r^2$

$\boxed{\text{Ответ: } S = \frac{\frac{4\pi}{6}-5{,}5+2\sqrt{3}}{4}\cdot r^2 \approx 0{,}4\,r^2.}$

№ 3

$$\begin{cases} 2|x+3| + |y| = 2 \quad (1) \\ 5|x-1| + 4|y-2| = 20 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $2|x+3| + |y| = 2$

x: $-$ -3 $+$

y: $-$ 0 $+$

$x \geq -3;\ y \geq 0:$ $2x+y=-4$	$y=-2x-4$ $-2 \geq x \geq -3;\ y \geq 0$
$x \geq -3;\ y < 0:$ $2x-y=-4$	$y = 2x+4$ $-2 > x \geq -3;\ y < 0$
$x < -3;\ y \geq 0:$ $-2x+y=8$	$y = 2x+8$ $-3 > x \geq -4;\ y \geq 0.$
$x < -3;\ y < 0:$ $-2x-y=8.$	$y=-2x-8$ $-3 > x > -4;\ y \geq 0$

(1)

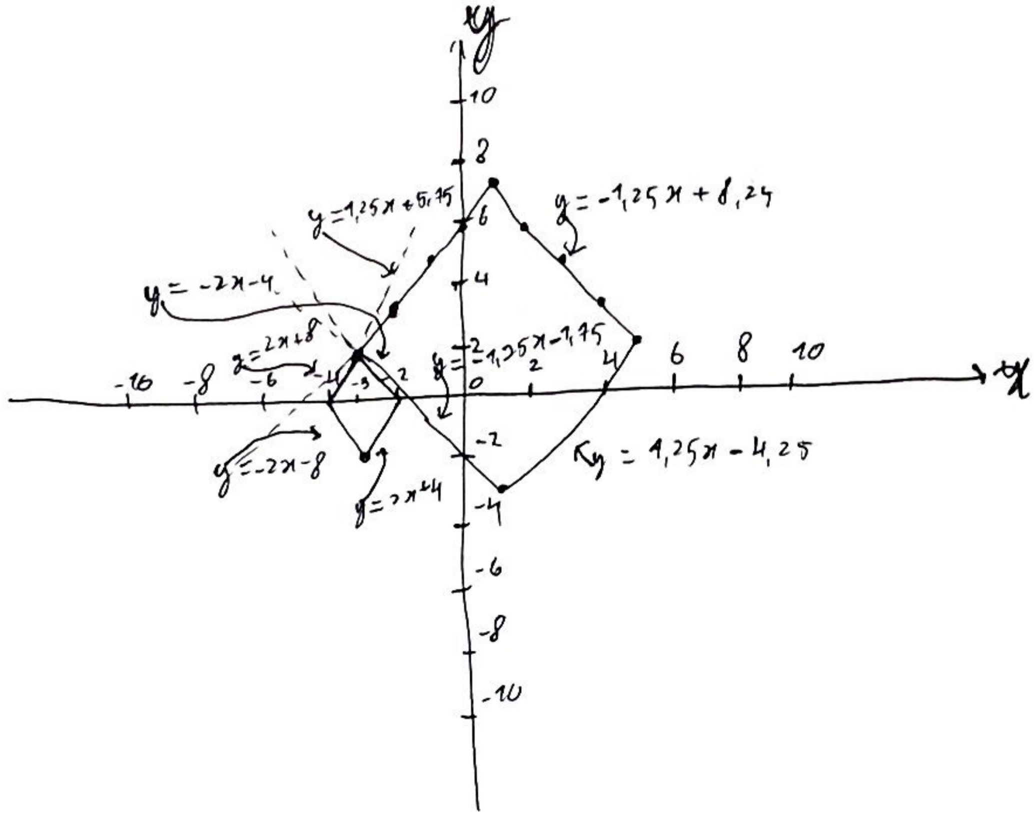
2: $5|x-1| + 4|y-2| = 20$

x: $-$ 1 $+$

y: $-$ 2 $+$

$x \geq 1\ \ y \geq 2$ $5x+4 = 33$	$y=-1{,}25x+8{,}25$ $5 \geq x \geq 1;\ y \geq 2$
$x \geq 1\ \ y < 2$ $5x-4y=17$	$y=1{,}25x-4{,}25$ $5 > x \geq 1;\ y < 2$
$x < 1\ \ y \geq 2$ $-5x+4y=23$	$y=1{,}25x+5{,}75$ $\geq x \geq -3;\ y \geq 2$
$x < 1\ \ y < 2$ $-5x-4y=7$	$y=-1{,}25x-1{,}75$ $1 > x > -3$.

(2).



Поскольку угол наклона прямой $y=-2x-4$ больше, чем угол наклона $y=-1{,}25x-1{,}75$, то ~~в точке (-~~ они не пересекаются, кроме как в точке $(-3;2)$, то точка $(-3;2)$ - единственное решение

$$\begin{cases} 2|\cancel{-3+3}|+|2|=2 \\ 5|-3-1|+4|\cancel{2-2}|=20 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ответ: } (-3;2).}$

№4.

Дано:

$T_{нагр} = 300 K$

$T_{хол} = 180 K$

$Q_н = 200$ Дж

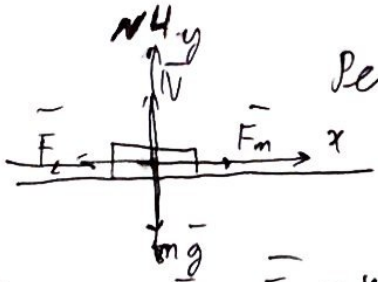
$n = 4/с$

$t = 3 с$

$F_{сопр} = 48 Н$

$S - ?$

$v = const$



Решение:

По II закону Ньютона

$$\bar{N} + m\bar{g} + \bar{F}_c + \bar{F}_m = ma. \quad v = const \Rightarrow a = 0.$$

$$Ox: F_m - F_c = 0$$

$$Oy: N - mg = 0.$$

$$F_m = F_c.$$

$$A_m = F_m \cdot S \Rightarrow F_c \cdot S = A_m; \; S = \frac{A_m}{F_c}.$$

$$\eta = \frac{A_m}{Q_н} = 1 - \frac{T_х}{T_н}; \quad \frac{A_m}{Q_н} = \frac{T_н - T_х}{T_н};$$

$$A_m = \frac{Q_н (T_н - T_х)}{T_н} \text{ - 1 цикл.}$$

$$A_{за\ 1с} = \frac{4 Q_н (T_н - T_х)}{T_н} = \frac{n Q_н (T_н - T_х)}{T_н}$$

$$A_{за\ всё\ время} = \frac{t \cdot n \cdot Q_н (T_н - T_х)}{T_н};$$

$$S = \frac{t \cdot n \cdot Q (T_н - T_х)}{F_c \cdot T_н} = 20 м.$$

$$\cancel{м = \frac{с \cdot \frac{1}{с} \cdot Н \cdot м \cdot К}{Н \cdot К}}$$

Ответ: 20 м

№ 5

Дано:

$m_1 = 0{,}02$ кг

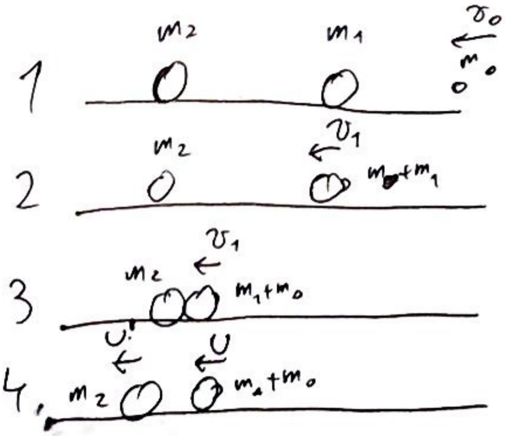
$m_2 = 0{,}03$ кг

$m_0 = 0{,}01$ кг

$v_0 = 100\ \frac{м}{с}$

$E_{вн}$ - ?

Решение:



Система замкнута

Отметим, что $m_1 + m_0 = m_2$.

По ЗСИ:

$$P_1 + P_0 = P_{1+0}$$

1-2: $m_0 v_0 = (m_0 + m_1) v_1'$

Зная, что $m_1 + m_0 = m_2$

$$m_0 v_0 = m_2 v_1$$

3-4: $P_{1+0} + P_2 = P_{1+0}' + P_2'$

$$(m_0 + m_1) v_1 = (m_0 + m_1) \cdot U + m_2 \cdot U'.$$

Зная, что $m_1 + m_0 = m_2$

$$m_2 v_1 = m_2 U + m_2 U'$$

По ЗСЭ (удар абс. упр.)

$$\frac{m_2 v_1^2}{2} = \frac{m_2 U^2}{2} + \frac{m_2 U'^2}{2}$$

$$m_2 v_1 = m_0 v_0 \Rightarrow v_1 = \frac{m_0 v_0}{m_2} \; ; \; v_1^2 = \frac{m_0^2 v_0^2}{m_2^2}$$

$$\frac{\cancel{m_2} \cdot m_0^2 \cdot v_0^2}{\cancel{2} m_2^{\cancel{2}}} = \frac{m_2 U^2 + m_2 U'^2}{\cancel{2}}$$

$$\frac{m_0^2 \cdot v_0^2}{m_2} = m_2 (U^2 + U'^2)$$

$$\begin{cases} m_0^2 \cdot v_0^2 = m_2^2 (U^2 + U'^2) \\ m_0 v_0 = m_2 U + m_2 U' \end{cases}$$

Т. к. удар был абсолютно упругий, при взаимодействии потерь энергии не было, значит $E_{вн} = 0$.

$\boxed{\text{Ответ: } 0}$