Шифр 11-3-3-25

Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 1

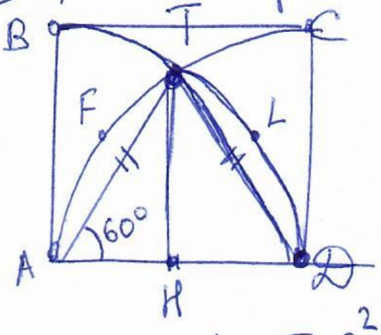
11 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Найдите остаток от деления числа $2021^{2022}+2023^{2022}$ на 2022.	2	15
2	Построены 4 круга с центрами в вершинах квадрата и радиусами, равными стороне квадрата. Найдите площадь пересечения этих кругов, если сторона квадрата равна 1	$1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	20
3	Решите систему уравнений . $\begin{cases} 5\lvert x+1\rvert+4\lvert y+2\rvert=20 \\ 2\lvert x-3\rvert+\lvert y+4\rvert=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$	25
4	В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде, площадь дна которого $S=50\text{см}^2$, закрытого поршнем массой m, находится одноатомный идеальный газ. Газ нагревают и поршень очень медленно перемещается на расстояние l. Цилиндр ставят на дно и сообщают газу в $n=2$ раза большее количество тепла для того, чтобы поршень переместился вверх на то же расстояние. Найти массу поршня. Атмосферное давление $p_0=100$ кПа. Считать ускорение свободного падения $g=10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Нагревом поршня и стенок цилиндра пренебречь.		15
5	На неподвижный шар массой M налетает шар массой m, движущийся поступательно со скоростью v. Считая удар абсолютно упругим и центральным, найти отношение M/m, при котором шар m теряет четвертую часть своей кинетической энергии.	$7+4\sqrt{3}$	25

МИСиС

Шифр 11-3-3-25

(2) 1) Рассмотрим сначала 2 круга.



$AT = TD = AD = 1$ (т.к. они явл. радиусами окружностей, чьи радиусы равны) $\Rightarrow$

$\triangle ATD$ равносторон. (по опред.) $\Rightarrow \angle TAD = 60°$

2) $S_{\text{сек. } TAD} = \frac{\angle TAD}{360°} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6}$

3) Пусть $TH \perp AD$, тогда $S_{\triangle TAH} = \frac{1}{2} S_{\triangle TAD} =$ (св-во равностор. $\triangle$)

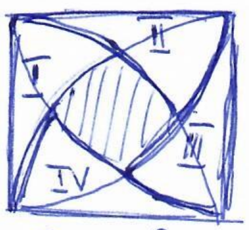
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

4) $S_{THDL} = S_{\text{сек. } TAD} - S_{\triangle TAH} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

5) В силу симметричного построения окружностей,

$S_{HAFT} = S_{THDL} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \underline{S_{\text{уг. } AFTLD} = 2S_{THDL} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$

6) $S_{ABTF} = S_{ABLD} - S_{\text{уг. } AFTLD} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$



7) Теперь осталась лишь заметить, что участок ABTF в силу симметрии встречается 4 раза и вычитая их из площади всего квадрата можно найти искомую площадь пересечения:

$S = 1^2 - 4\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

Ответ: $1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$.

(3) $\begin{cases} 5|x+1| + 4|y+2| = 20; \\ 2|x-3| + |y+4| = 2; \end{cases}$

Решение

Нарисуем множество точек удовл $1^{\text{му}}$ и $2^{\text{му}}$ выражению, найдем точки пересечения. Они и будут решениями системы.

1) $5|x+1| + 4|y+2| = 20$

Построим множество точек при $x \geq -1$ и $y \geq -2$ и симметрично отразим отн. прямых $x = -1$ и $y = -2$.

~~2)~~ При $x \geq -1$, $y \geq -2$: $5x + 5 + 4y + 8 = 20 \Leftrightarrow y = \frac{-5x + 7}{4}$

x	-1	3
y	3	-2

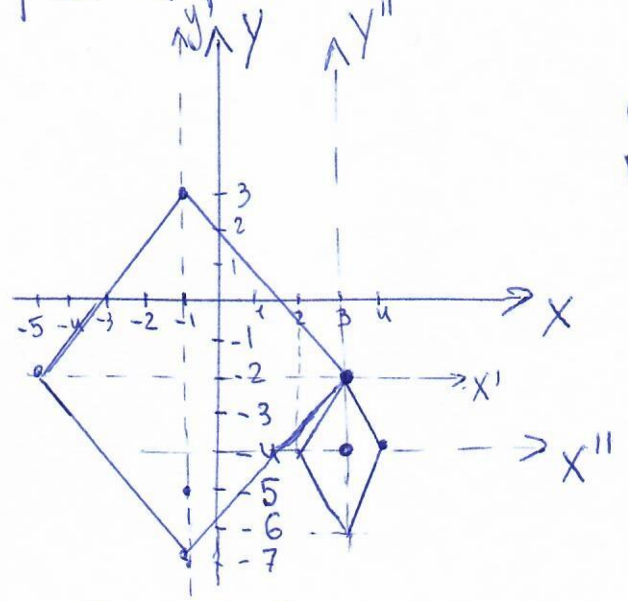
Шифр 11-3-3-25

2) $2|x-3|+|y+4|=2$.

Аналогично изобразим множество точек при $x \geq 3$ и $y \geq -4$ и отобразим отн. $x=3$ и $y=-4$.

При $x \geq 3$, $y \geq -4$: $2x-6+y+4=2 \Leftrightarrow y=-2x+4$

x	3	4
y	-2	-4



Как видно из графиков существует лишь одна точка пересечения этих множеств — $(3;-2)$.

Ответ: $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$.

⑤ Дано:

$E_{k2}=\frac{3}{4}E_{k1}$

$\frac{M}{m}$ $\frac{m}{M}$ - ?

Решение:

Обозначим за ϑ' и U скорости налетающего шара и изначально неподвижного после удара соответственно, тогда из условия:

$\frac{3}{4}\cdot\frac{m\vartheta^2}{2}=\frac{m(\vartheta')^2}{2} \Rightarrow \vartheta'=\frac{\sqrt{3}}{2}\vartheta$

Удары абсолютно упругие $\Rightarrow E_k=const$ для системы тел, составл. из шаров $\Rightarrow E'_{k2}=\frac{1}{4}E_{k1} \Leftrightarrow \frac{MU^2}{2}=\frac{1}{4}\frac{m\vartheta^2}{2} \Rightarrow U=\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{\frac{m}{M}}$

По ЗСИ:

$m\vec{\vartheta}=m\vec{\vartheta'}+M\vec{U}$

Если шары покатятся в 1м направлении, то

$m\vartheta=m\vartheta'+MU$

$m\vartheta=m\frac{\sqrt{3}}{2}\vartheta+M\cdot\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{\frac{m}{M}} \quad |:M\vartheta$

$\frac{m}{M}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{M}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{M}}$

$a=\sqrt{\frac{m}{M}}$: $a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\frac{1}{2}a \quad |:a\neq0$

$a=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2} \quad |\times2$

$(2-\sqrt{3})a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{M}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{m}{M}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3}$.

Шифр 11-3-3-25

МИСиС

Если считать, что шары полетят в разные стороны:

$m\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2}m\vartheta + \frac{1}{2}M\vartheta\sqrt{\frac{m}{M}} \quad |:M\vartheta$

$\frac{m}{M} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{M} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{M}} \quad |\times 2$

$2\frac{m}{M} + \sqrt{3}\frac{m}{M} = \sqrt{\frac{m}{M}}$

$a = \sqrt{\frac{m}{M}}: \; 2a^2 + \sqrt{3}a^2 = a \quad |:a \neq 0$

$a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}}$

Во 2-м случае мы получаем отношения, обратное первому, т.е. по сути дела ответы отличаются лишь ~~тем~~ массу какого шарика брать большей из-за того.

Ответ: $\cancel{\frac{m}{M} = 7-4\sqrt{3}}$ $\frac{M}{m} = 7+4\sqrt{3}$

(1) Рассмотрим сумму $2021^{2022} + 2023^{2022} =$

$= (2022-1)^{2022} + (2022+1)^{2022}$

Каждую скобку можно представить с помощью бинома Ньютона.

$(2022-1)^{2022} = 2022^{2022} - 2022^{2021}\cdot 1^1 + \ldots - 2022^1 \cdot 1^{2021} + 1^{2022}$

Вторая скобка раскладывается аналогично, только везде будут плюсы.

Мы получаем, что после разложения каждое из полученных слагаемых, кроме последнего, нацело делится на 2022. Засчёт оставшихся 2 единиц, которые не делятся нацело на 2022 получается остаток 2.

Ответ: 2