



Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 1

9 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Вычислите без калькулятора: $\sqrt{2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 1}$		15
2	Найдите сумму $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98} + \sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$		20
3	В прямоугольник со сторонами 3 и 4 вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 1:3. Найдите стороны вписанного прямоугольника.		25
4	Тело бросили вертикально вверх со скоростью $V_0 = 43$ м/с. Найти путь, пройденный телом за пятую секунду движения. Считать ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.		15
5	Из куска однородной проволоки изготовлен замкнутый контур, имеющий форму квадрата $ABCD$. К вершинам квадрата A и B подводят напряжение U , а затем то же самое напряжение U подводят к вершинам A и C . Во сколько раз ток, текущий через сторону AB , в первом случае отличается от тока, текущего через сторону AB , во втором?		25

№1

$$\sqrt{2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 1} = ?$$

Замена: $2020 = n$, тогда $2019 = n-1$; $2021 = n+1$; $2022 = n+2$

$$\begin{aligned} \sqrt{2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 1} &= \sqrt{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + 1} = \sqrt{(n^2+2n)(n^2-1) + 1} = \\ &= \sqrt{n^4 - n^2 + 2n^3 - 2n + 1} = \sqrt{n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1} = 408040 \end{aligned}$$

Ответ: 408040

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = ?$$

Рассмотрим первое слагаемое.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2^2}-\sqrt{1^2}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1})(\sqrt{2}+\sqrt{1})}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-\sqrt{1}$$

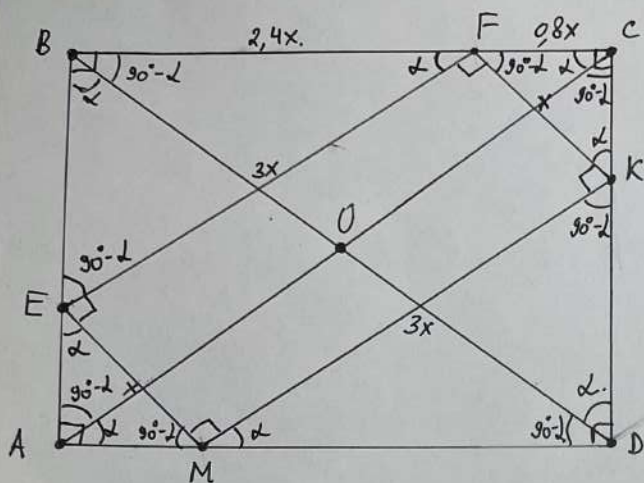
$$\text{Значит, } \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

С помощью полученной формулы упростим все слагаемые.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} &= \sqrt{2}-\sqrt{1} + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \\ + \sqrt{99}-\sqrt{98} + \sqrt{100}-\sqrt{99} &= -\sqrt{1} + \sqrt{100} = \sqrt{100}-\sqrt{1} = 10-1=9 \end{aligned}$$

Ответ: 9.

№3.



$$AB = CD = 3$$

$$BC = AD = 4$$

ABCD - прямоугольник

EFKM - прямоугольник

$$FK : EF = 1 : 3$$

Пусть $FK = x$, тогда $EF = 3x$

$$BD \text{ и } AC - \text{диагонали} \Rightarrow BD = AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Рассмотрим $\triangle CFK$ и $\triangle CBD$.

$$\left. \begin{array}{l} FK \parallel BD \Rightarrow \angle CKF = \angle CBD \\ \angle BCD - \text{общий} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CFK \sim \triangle CBD \Rightarrow \frac{FK}{BD} = \frac{CF}{CB} = \frac{CK}{CD}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{CF}{4}$$

$$CF = \frac{4x}{5} = 0,8x.$$

Рассмотрим $\triangle BEF$ и $\triangle ABC$

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel AC \Rightarrow \angle BEF = \angle BAC \\ \angle ABC - \text{общий} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BC} = \frac{BE}{AB}.$$

$$\frac{3x}{5} = \frac{BF}{4}$$

$$BF = \frac{12x}{5} = 2,4x.$$

$$BC = BF + FC = 2,4x + 0,8x = 3,2x = 4.$$

$$x = \frac{4}{3,2} = \frac{40}{32} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$FK = EM = 1,25$$

$$EF = MK = 3x = 3 \cdot 1,25 = 3,75$$

Ответ: $FK = EM = 1,25$; $EF = MK = 3,75$.

№4.

Дано:

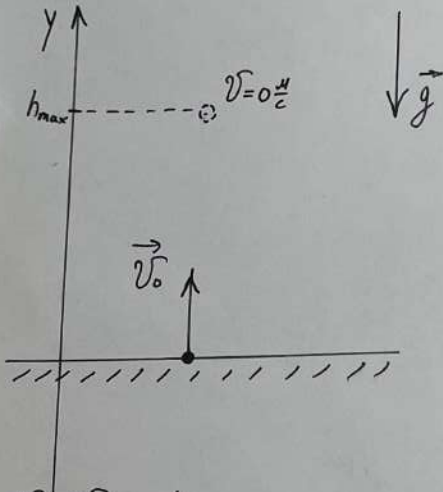
$$v_0 = 43 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Найти: $S(\text{за } 5\text{с}) = ?$

Решение

за 5-ю с - промежуток времени от 4 до 5 с



$$v = v_0 - g t_0$$

$$t_0 = \frac{v - v_0}{-g} = \frac{(0 - 43) \frac{\text{м}}{\text{с}}}{-10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 4,3\text{с} \quad \text{— время, за которое тело долетит до вершины.}$$

$$h_{\text{max}} = v_0 \cdot t_0 - \frac{g t_0^2}{2} = 43 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 4,3\text{с} - \frac{10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (4,3\text{с})^2}{2} = 184,9\text{м} - \frac{184,9}{2}\text{м} = \frac{184,9}{2}\text{м} = 92,45\text{м.}$$

— максимальная высота.

$$\begin{array}{r} \times 43 \\ 43 \\ \hline 129 \\ + 172 \\ \hline 1849 \end{array}$$

$$t' = 5 - t_0 = 5 - 4,3 = 0,7(\text{с}) \quad \text{— время полета вниз до 5 с.}$$

$$h' = v_0 t' + \frac{g t'^2}{2} = \frac{g t'^2}{2}$$

$$h' = \frac{10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (0,7\text{с})^2}{2} = \frac{4,9\text{м}}{2} = 2,45\text{м} \quad \text{— пролетело тело вниз до времени 5 с.}$$

$$2,45 < 92,45 \Rightarrow \text{тело не достигло земли.}$$

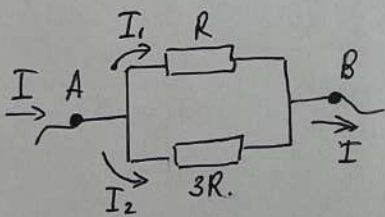
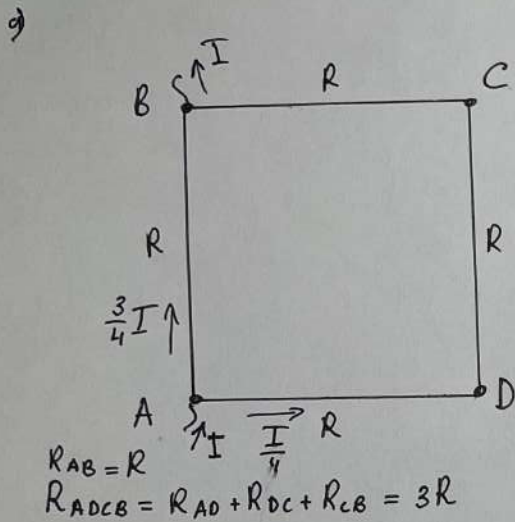
$$S(\text{за } 5\text{с}) = S(5\text{с}) - S(4\text{с})$$

$$S(4\text{с}) = h'' = v_0 \cdot t'' - \frac{g t''^2}{2} = 43 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 4\text{с} - \frac{10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (4\text{с})^2}{2} = 172\text{м} - 80\text{м} = 92\text{м.}$$

$$S(5\text{с}) = h_{\text{max}} + h' = 92,45\text{м} + 2,45\text{м} = 94,9\text{м.}$$

$$S(\text{за } 5\text{с}) = 94,9\text{м} - 92\text{м} = 2,9\text{м.}$$

Ответ: 2,9 м.



$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow U = IR$$

$$U_1 = U_2$$

$$U_1 = I_1 \cdot R$$

$$U_2 = I_2 \cdot 3R$$

$$I_1 \cdot R = I_2 \cdot 3R$$

$$I_1 = 3I_2$$

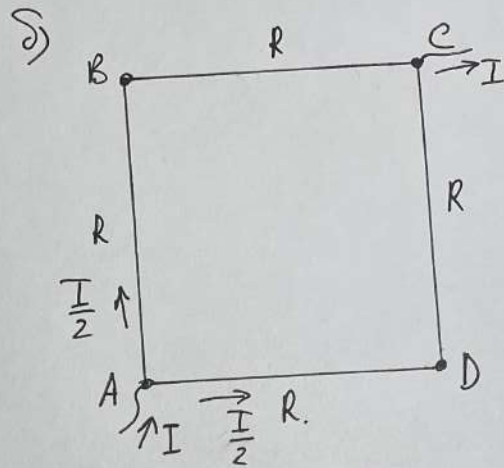
$$I = I_1 + I_2 = 4I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I}{4}$$

$$I_1 = I - I_2 = I - \frac{I}{4} = \frac{3}{4}I$$

$$I_{AB_1} = \frac{3}{4}I$$

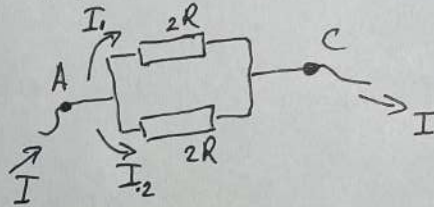
$$\frac{I_{AB_1}}{I_{AB_2}} = \frac{\frac{3}{4}I}{\frac{I}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{4} = 1,5$$

Answer: 1,5 puta.



$$R_{ABC} = R_{AB} + R_{BC} = 2R$$

$$R_{ADC} = R_{AD} + R_{DC} = 2R$$



$$U_1 = U_2$$

$$U_1 = I_1 \cdot 2R$$

$$U_2 = I_2 \cdot 2R$$

$$I_1 \cdot 2R = I_2 \cdot 2R$$

$$I_1 = I_2$$

$$I = I_1 + I_2 = 2I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I}{2}$$

$$I_1 = I - I_2 = I - \frac{I}{2} = \frac{I}{2}$$

$$I_{AB_2} = \frac{I}{2}$$