Шифр

Олимпиада «МИСиС зажигает звезды»

Техническое направление

Заключительный этап 2021 г.

Вариант 2

9 класс

№	Задание	Ответы	Баллы
1	Вычислите без калькулятора: $\sqrt{2020\cdot 2021\cdot 2022\cdot 2023+1}$		15
2	Найдите сумму $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+.....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$		20
3	В прямоугольник со сторонами 4 и 5 вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 1:3. Найдите стороны вписанного прямоугольника		25
4	Тело бросили вертикально вверх со скоростью $V_0 = 34$ м/с. Найти путь, пройденный телом за четвертую секунду движения. Считать ускорение свободного падения $g = 10\ \frac{м}{с^2}$.		15
5	Из куска однородной проволоки изготовлен замкнутый контур, имеющий форму квадрата *ABCD* с диагональю *AC*. К вершинам квадрата *A* и *C* подводят напряжение. Во сколько раз ток, текущий через сторону *AB*, отличается от тока, текущего через диагональ *AC*?		25

Абрютин Шаги лист 1.

№1.

$\sqrt{2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 + 1}$

Представим подкоренное выражение как сумму квадратов. Пусть $b = 1$, тогда:

$(a+b)^2 = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$

$2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 + 1 = a^2 + 2a + 1$

$2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 = a^2 + 2a$

$a(a+2) = 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023$

Я перем нашел произведения всех пар множества чисел $\{2020; 2021; 2022; 2023\}$ и установил, что:

$2023 \cdot 2020 = 2021 \cdot 2022 - 2$

$4086460 = 4086462 - 2$

$2021 \cdot 2022 = 2023 \cdot 2020 + 2$

Делаем вывод, что $a = \overset{2023 \cdot 2020}{\cancel{2021 \cdot 2022}}$, $\cancel{a}(a+2) = \overset{2021 \cdot 2022}{\cancel{2023 \cdot 2020}}$
$= \cancel{2021 \cdot 2022 + 2}\ 2023 \cdot 2020 + 2$

Нужно найти: $\sqrt{(a+1)^2} = a + 1$. Подставим a:

$2023 \cdot 2020 + 1$

Вычислим:

$2023 \cdot 2020 = 4086460$

$4086460 + 1 = 4086461$

$\boxed{\text{Ответ: } 4086461}$

№2. Абрютин Иван лист 2.

Попробуем избавиться от иррациональности в знаменателе каждой дроби и найти закономерность.

$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = \sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-\sqrt{1})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} =$

$= \sqrt{2}-\sqrt{1}$

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$ и т.д.

Получаем сумму:

$(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) \ldots + (\sqrt{81}-\sqrt{80})$

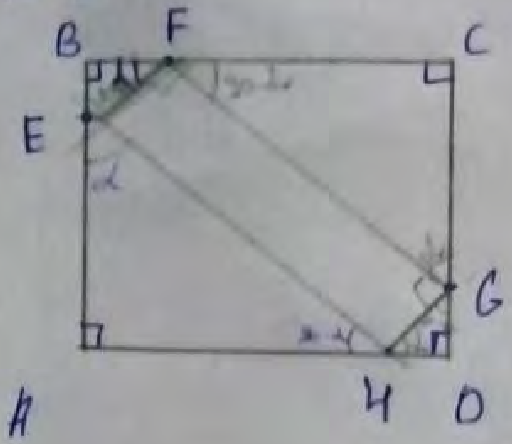
~~ко все корни, кроме $\sqrt{2}-\sqrt{1}$; $+\sqrt{81}$~~

сократятся все корни, кроме $-\sqrt{1}$; $+\sqrt{81}$

Получится: $\sqrt{81}-1$

Ответ: $\sqrt{81}-1$.

№ 3



Дано: Бирютин Иван лист 3.

$ABCD$ - прямоугольник

$BC = 5 \quad AB = 4$

$\frac{EF}{EH} = \frac{1}{3}$ $EFGH$ - вписанный прямоугольник в $ABCD$.

Найти: $EF; FG; GH; EH$ - ?

Решение: $EF = GH$; $FG = EH$

1) Пусть $\angle BFE = \alpha$, тогда $FEB = 90° - \alpha$ по свойству прямоуг Δ ($\angle B$ - прямоуг $90°$ по условию)

$\angle CFG = 180° - 90°$ ($\cancel{\angle EF}$ $\angle EFG = 90°$ по условию) $- \alpha = 90° - \alpha$

($\angle CFG = 180° - \angle BFE - \angle EFG$).

$\angle CGF = 90 - \angle CFG = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$

2) $\Delta BFE \sim \Delta CGF$ по 3 углам: $\angle B = \angle C = 90°$

$\angle BFE = \angle CGF = \alpha$ и $\angle CFG = \angle FEB = 90° - \alpha$

$\Rightarrow \frac{FG}{EF} = \frac{CG}{BF} = \frac{FC}{BE}$ $\cancel{=}$ $\frac{EF}{EH} = \frac{EF}{FG} = \frac{1}{3}$ (т.к. $EFGH$ - прямоуг)

$\Rightarrow \frac{FG}{EF} = 3 \quad \frac{CG}{BF} = \frac{FC}{BE} = 3$

Пусть $BF = x$; $BE = y$, тогда $CG = 3x$; $FC = 3y$

$EA = CG$ (т.к. $\Delta EAH = \Delta FCG$ по 2 углам и стр.)

$\begin{cases} BF + FC = 5 \\ BE + EA = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ y + 3x = 4 \end{cases}$ $x = 5 - 3y$ $\quad 15 - 9y + y = 4$ $\quad 8y = 11 \quad y = \frac{11}{8}$ $\quad x = 5 - 3\frac{11}{8} = \frac{40 - 33}{8} = \frac{7}{8}$

3) По теор Пифагора для ΔEBF ($\angle B = 90°$).

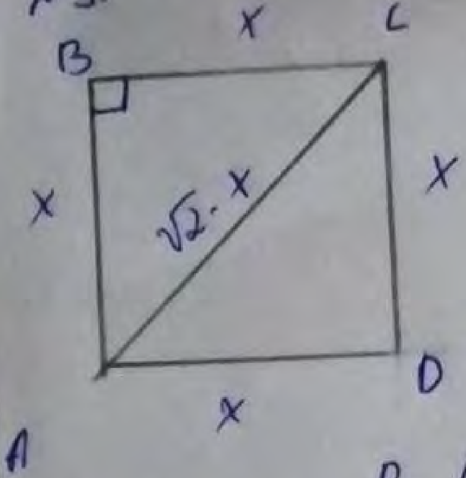
$EF^2 = BE^2 + BF^2 \quad EF = \sqrt{y^2 + x^2} \quad EF = \sqrt{\frac{121}{64} + \frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{170}{64}}$

$= \frac{\sqrt{170}}{8} \quad EH = 3EF = \frac{3 \cdot \sqrt{170}}{8}$

Ответ: $EF = GH = \frac{\sqrt{170}}{8}$; $FG = EH = \frac{3 \cdot \sqrt{170}}{8}$

Авзомян Шон лист 5

№5.



$I = \dfrac{U}{R}$ $\quad R = \dfrac{p \cdot L}{a}$

где
p - удельное сопротивление проводника
L - длина проводника
a - ширина сечения проводника

I $\quad R_{AB} = \dfrac{p \cdot L}{a}$ $\cancel{R}$

По теор Пифагора для $\triangle$ ABC ($\angle B = 90°$ по условию):

$AC^2 = AB^2 + BC^2$; $\quad AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$AC = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2} \cdot L$

II $\quad R_{AC} = \dfrac{p \cdot \sqrt{2} \cdot L}{a}$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{AB} &= \frac{U}{R_{AB}} = \frac{U \cdot a}{p \cdot L} \\ I_{AC} &= \frac{U}{R_{AC}} = \frac{U \cdot a}{p \cdot \cancel{2\sqrt{L}}\,\sqrt{2} \cdot L} \end{aligned}}$$

$\cancel{\dfrac{R_{AB}}{R_{AC}} = \dfrac{p \cdot L}{a} : \dfrac{a}{p \cdot \sqrt{2} \cdot L} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71}$

~~В 0,71 раз~~ ток (I) на AC

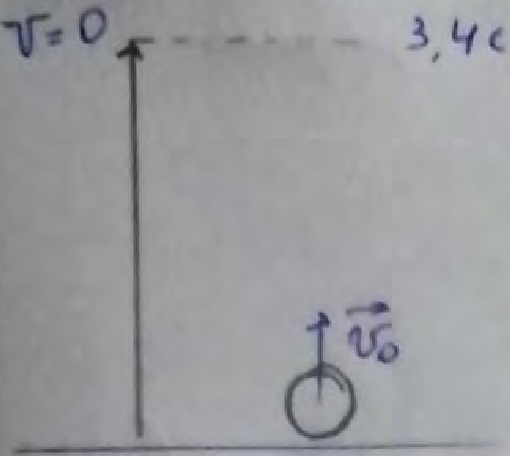
$\dfrac{I_{AB}}{I_{AC}} = \dfrac{U \cdot a}{p \cdot L} : \dfrac{U \cdot a}{p \cdot \cancel{2\sqrt{2}}\sqrt{2} \cdot L} = \dfrac{U \cdot a \cdot p \cdot \sqrt{2} \cdot L}{U \cdot a \cdot p \cdot L} = \sqrt{2} \approx$

$\approx 1{,}41 \rightarrow$ в 1,41 раза ток на AB больше тока на AC, чем в AB
т.к. на AC больше сопротивление в 1,41 раза

Ответ: В 1,41 раза больше

№4.

Дано: $V_0 = 34$ м/с $g = 10$ м/с^2 | Найти: S_{3-4} ?



Найдем время полета вверх:

$$g = \frac{V_0 - V_1}{t} \qquad t = \frac{V_0}{g} \qquad t = \frac{34\,м/с}{10\,м/с^2} = 3,4с$$

$$S(t) = 0 + V_0 \cdot t - \frac{g t^2}{2} \text{ полет вверх}$$

$$S(t) = 0 + 0 + \frac{g \cdot t^2}{2} \text{ - полет вниз } \{\text{падение}$$

$$S_{3-4} = S(4) - S(3)$$

S(3)= Первые 3,4 секунды тело ~~падало~~ летело вверх, далее тело летело вниз до остановки.

$$S(3) = 34\,м/с \cdot 3с - \frac{10\,м/с^2 \cdot 3^2 с^2}{2} = 102\,м - 45\,м = 57\,м$$

$$S(4) = S(3,4)\uparrow + S(0,6)\downarrow = 34\,м/с \cdot 3,4с - \frac{10\,м/с^2 \cdot (3,4)^2}{2} +$$

$$+ \frac{10\,м/с^2 \cdot (0,6с)^2}{2} = 115,6 - 57,8 + 1,8 = \cancel{61,4}\ 59,6$$

$$S(4) - S(3) = 59,6 - 57 = 2,6\,м$$

Ответ: $S_{3-4} = 2,6$ м