МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

В.В. Ческидов
А.В. Липина
И.А. Мельниченко

Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инженерной направленности

Техническое направление «МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА»

8–9-й классы

МИСиС

Москва 2017

УДК 51
Ч-51

Ческидов В.В.

Ч-51 Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инженерной направленности : Техническое направление «Математика, физика» : 8–9-й классы / В.В. Ческидов, А.В. Липина, И.А. Мельниченко. – М. : Изд. Дом НИТУ «МИСиС», 2017. – 62 с.

Цель данного пособия – помочь школьникам эффективно подготовиться к олимпиадам по техническому направлению.

Пособие содержит примеры олимпиадных заданий с разбором, анализ их выполнения учащимися, а также справочные материалы, охватывающие основные представленные на олимпиаде разделы математики и физики.

Пособие предназначено для школьников 8–9 классов и для учителей физики и математики. Материалы пособия могут быть использованы для подготовки к различным олимпиадам по математике и физике, а также на уроках.

УДК 51

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одними из важнейших задач олимпиад для школьников являются расширение кругозора, повышение уровня подготовки и развитие интереса к науке. НИТУ «МИСиС» проводит олимпиаду по техническому направлению для школьников 8–11 классов «МИСиС зажигает звезды», а также принимает активное участие в подготовке и проведении других олимпиад («Объединенная межвузовская математическая олимпиада» (ОММО), «Многофункциональная инженерная олимпиада «Звезда» и другие).

Накопленный опыт позволяет выделить наиболее часто встречающиеся категории олимпиадных задач. В силу ограниченности объема, пособие не может охватить весь круг таких задач. В нем подробно с комментариями разбираются решения, относящихся к следующим семи темам: делимость целых чисел, действия с многочленами, текстовые задачи, планиметрия, движение материальной точки, постоянный ток, тепловые явления. Всего более полусотни задач. В пособие включены задачи из разных источников, среди них и задачи, которые были на олимпиаде «МИСиС зажигает звезды».

Надеемся, что это пособие принесет пользу не только школьникам 8 и 9 классов, но и всем интересующимся математикой, физикой и техническими науками.

Дорогие школьники! Ждем вас на олимпиаде «МИСиС зажигает звезды», а также на других олимпиадах, и желаем победы!

1. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Анализ олимпиадных мероприятий по математике различного уровня: от школьного до всероссийского – показывает, что в 7, 8 и даже 9 классах одними из самых распространенных являются задания на тему делимости и кратности целых чисел. Рассмотрим некоторые особенности задач данного раздела.

Основные термины и определения, которые будут использованы в данном разделе:

Целое число – это натуральные числа, число нуль, а также числа, противоположные натуральным.

Простое число – это натуральное число, большее единицы, имеющее ровно два натуральных делителя: 1 и само себя. Известно, чтоб любое целое число раскладывается на множители, каждый из которых представляет собой простое число [1].

При выполнении задач данного раздела нередко возникает необходимость использования признаков делимости (правила, позволяющее быстро определить, является ли число кратным заранее заданному числу, без необходимости выполнять деление).

Напомним основные из них:

- Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2, то есть является чётной.
- Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.
- Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число из двух последних его цифр нули или делится на 4.
- Число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5).
- Число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3.
- Число делится на 7 тогда и только тогда, когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7 (например, 364 делится на 7, так как $36 - (2 * 4) = 28$ делится на 7)
- Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры – нули или образуют число, которое делится на 8.
- Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

- Число делится на 10 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на ноль.
- Число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр с чередующимися знаками делится на 11 (то есть 182919 делится на 11, так как 1 - 8 + 2 - 9 + 1 - 9 = -22 делится на 11) – следствие факта, что все числа вида $10n$ при делении на 11 дают в остатке $(-1)n$.

Существуют и другие признаки делимости, с которыми можно познакомиться в учебниках или электронных ресурсах.

Напомним еще несколько важных закономерностей, которые могут быть использованы при решении задач на делимость чисел. Если произведение двух целых чисел делится на простое число, то, по крайней мере, одно из них делится на это число. Если m, n, k, r целые неотрицательные числа и $n=mk+r$, где $0\leq r\leq m-1$, то число r называется остатком от деления n на m. Заметим, что при делении на m различных остатков ровно m: 0, 1, 2, 3,…,m-1 и, если взять подряд m натуральных чисел, то одно из них делится на m [1].

Рассмотрим решение нескольких типовых задач.

Задача 1.1. Какой цифрой оканчивается сумма $9^{2007} + 9^{2006}$?

Решение:

На первый взгляд задание выглядит сложным, очевидно, что вычислить значение представленного выражения практически невозможно и необходимо найти другой метод, который позволит найти верный ответ.

Рассмотрим два возможных варианта решения задачи. Первый имеет относительно частный характер, но зато идеально подходит для данного задания. Вынесем общий множитель 9^{2006} и представим выражение в виде произведения:

$$9^{2007} + 9^{2006} = 9^{2006}(9 + 1) = 9^{2006}\cdot 10.$$

Таким образом, получаем произведение двух чисел, одно из которых 10. Очевидно, что в итоговое значение выражения будет делиться на 10, в соответствии с признаком делимости число оканчивается на нуль.

Второй способ более общий и часто применяется при решении задач, связанных с определение последней цифры в числе.

Рассмотрим последовательность:

$$9^0 = 1;\ 9^1 = 9;\ 9^2 = 81;\ 9^3 = 729;\ 9^4 = 6561\ \ldots$$

Несложно заметить, что при возведении девятки в четную степень последняя цифра в полученном результате «1», а при возведении в нечетную степень «9». Тогда, очевидно, что результат выражения вида:

$9^{2n} + 9^{2k+1}$, где n и k – любые натуральные числа или нуль.

оканчивается на нуль.

Задача 1.2. Докажите, что для любого натурального n число n^3-n делится на 3 без остатка.

Решение:

Преобразуем выражение n^3-n. Сначала вынесем общий множитель n за скобки, а затем выражение в скобках разложим на множители, так как оно является разностью квадратов.

$n^3-n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$

При делении любого числа на 3 возможны следующие исходы:

1. число делится без остатка;
2. число делится с остатком 1;
3. число делится с остатком 2.

Рассмотрим возможные исходы относительно n:

- если n делится на 3 без остатка, то и все выражение $n(n-1)(n+1)$ без остатка делится на 3;
- если n делится на 3 с остатком 1, то выражение $(n-1)$ делится на 3 без остатка и все выражение $n(n-1)(n+1)$ без остатка делится на 3;
- если n делится на 3 с остатком 2, то выражение $(n+1)$ делится на 3 без остатка и все выражение $n(n-1)(n+1)$ без остатка делится на 3.

Таким образом, мы доказали, что для любого натурального n число n^3-n делится на 3 без остатка.

В процессе решения данной задачи мы рассмотрели частный случай малой теоремы Ферма, которая говорит, что если p – простое натуральное число, то при любом натуральном а число $a^p - a$ делится на p.

Задача 1.3. Найдите все двузначные числа, у которых сумма цифр после умножения на 3 не меняется [2].

Решение:

Если число n умножили на 3, то сумма цифр числа $3n$ делится на 3, но она такая же, как у n, следовательно, сумма цифр самого числа n делится на 3 и число n делится на 3. Тогда при умножении на 3 получится, что число $3n$ делится на 9, и его сумма цифр делится на 9, а значит, сумма цифр и самого числа n делится на 9, то есть n кратно 9. Выпишем такие двузначные числа 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99 кратные 9. Посмотрим, какие из них удовлетворяют условию задачи (табл. 1.1).

Из табл. 1.1 видно, что сумма цифр изменилась только у числа 63.

Таким образом, получаем ответ: 18, 27, 36, 45, 54, 72, 81,90, 99.

Таблица 1.1

n	Сумма цифр n	$3n$	Сумма цифр $3n$
18	9	54	9
27	9	81	9
36	9	108	9
45	9	135	9
54	9	162	9
63	9	189	18
72	9	216	9
81	9	243	9
90	9	270	9
99	18	297	18

Задача 1.4. Найти все целые корни уравнения: $113x + 179y = 17$, удовлетворяющие неравенствам $x > 0$, $y + 100 > 0$.

Решение:

Выразим переменную x, перед которой стоит меньший коэффициент, из управления. Получим:

$$x = \frac{-179y + 17}{113} = -y + \frac{-66y + 17}{113}$$

Введем новую переменную:

$$1x_1 = x + y,$$

где $x_1 = \dfrac{-66y + 17}{113}$.

Тогда исходное уравнение запишем в виде:

$$113x_1 = -66y + 17.$$

Вновь выразим переменную с меньшим коэффициентом:

$$y = \frac{-113x_1 + 17}{66} = -x_1 + \frac{-47x_1 + 17}{66}$$

Введем новую переменную:

$$y_1 = y + x_1,$$

где $y_1 = \dfrac{-47x_1 + 17}{66}$.

Следовательно, получим уравнение при подстановке:

$$66y_1 = -47x_1 + 17$$

Выразим переменную с меньшим коэффициентом из уравнения:

$$x_1 = \frac{-66y_1 + 17}{47} = -y_1 + \frac{-19y_1 + 17}{47}$$

Далее вновь введем новую переменную:

$$x_2 = y_1 + x_1,$$

где $x_2 = \dfrac{-19y_1 + 17}{47}$

Таким образом уравнение будет иметь вид:

$$47x_2 = -19y_1 + 17$$

Выразим переменную с меньшим коэффициентом y_1 из уравнения

$$y_1 = \frac{-47x_2 + 17}{19} = -2x_2 + \frac{-9x_2 + 17}{19}$$

Введем новую переменную:

$$y_2 = y_1 + 2x_2,$$

где $y_2 = \dfrac{-9x_2 + 17}{19}$.

Следовательно, получаем уравнение:

$$19y_2 = -9x_2 + 17.$$

Выразим переменную x_2 из уравнения:

$$x_2 = \frac{-19y_2 + 17}{9} = -2y_2 + \frac{-y_2 + 17}{9}$$

Обозначим новую переменную:

$$x_3 = x_2 + 2y_2,$$

где $x_3 = \dfrac{-y_2 + 17}{9}$

Тогда уравнение запишем в виде:

$$9x_3 = -y_2 + 17$$

Таким образом, преобразованное управление приведено к виду, общее решение которого имеет вид:

$$\begin{cases} x_3 = t \\ y_2 = -9t + 17 \end{cases}, \quad t \in Z .$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим:

$x_3 = x_2 + 2y_2 = 5x_2 + 2y_1 = 5x_1 + 7y_1 = 12x_1 + 7y = 12x + 19y = t;$

$y_2 = y_1 + 2x_2 = 3y_1 + 2x_1 = 3y + 5x_1 = 8y + 5x = -9t + 17$

С учетом последних равенств запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 12x + 19y = t \\ 8y + 5x = -9t + 17 \end{cases}$$

Решив систему уравнений относительно переменных x и y, получим общим решение для исходящего уравнения:

$$\begin{cases} x = 179t - 323 \\ y = -113t + 204 \end{cases} \quad t \in Z$$

С учетом условий $x > 0$, $y + 100 > 0$, найдем $t = 2$, $x = 35$, $y = -22$. Следовательно: $x = 35$, $y = -22$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Докажите, что число $n^5 - n$ делится на 5.
2. Докажите, что, если m и n - целые и $n^2 + m^2$ делится на 3, то числа m и n тоже делятся на 3.
3. Найдите последнюю цифру числа 52^{2018}.
4. Найдите последнюю цифру числа $13^{(12^{11})}$.
5. Найдите последнюю цифру числа 23^{2017}.
6. Найдите последнюю цифру числа 437^{2014}.
7. Найдите последнюю цифру числа 124^{3020}.
8. Найдите последнюю цифру числа 123^{2015}.
9. Найдите последнюю цифру числа 142^{2013}.
10. Решите в целых числах уравнение $xy = x + y$.
11. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

2. ДЕЙСТВИЕ С МНОГОЧЛЕНАМИ

В этом разделе рассмотрим наиболее распространенные задачи, связанные с разложением многочлена на множители и поиском его корней.

Основные термины и определения, которые будут использованы в данном разделе:

Разложить многочлен на множители – это значит представить его в виде произведения двух или нескольких многочленов.

Корень многочлена – это значения переменной, при которой значение многочлена равно нулю.

Следует отметить, что вся теория многочленов развивалась в связи с решением уравнений. В первую очередь установим связь между корнями многочлена и его линейными делителями, то есть делителями вида ($x - a$). Таким образом, если многочлен $f(x)$ делится без остатка на ($x - a$), то a является его корнем и многочлен можно представить в виде [3]:

$$f(x) = (x - a)q(x).$$

Рассмотрим основные законы разложения выражений на множители:

$ab + ac = a(b + c)$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1})$

Рассмотрим теорему Безу, которой будем пользоваться при решении задач в данном разделе.

Теорема. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен ($x - a$) равен $P(a)$.

Следствие. Если число a является корнем многочлена $P(x)$, то многочлен $P_n(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ делится без остатка на двучлен $(x-a)$

Доказательство. Поделим многочлен $P(x)$ на двучлен $(x-a)$, тогда:

$$P(x) = (x-a)Q_{n-1}(x)+R,$$

где R остаток.

Подставим в последнее равенство вместо x число a, получим:

$$P(a) = (a-a)Q_{n-1}(a)+R \rightarrow P(a)=R$$

Теорема доказана.

При этом если $P(x) = (x-a)^k\, Q_{n-k}(x)+R$ и $Q_{n-k}(x) \neq a$, то k называется *кратностью корня a*. Если кратность k=1, то корень называется простым, а если $k \geq 2$, то корень называется кратным.

Приведем еще несколько теорем, связанных с операциями над многочленами.

Всякий многочлен степени n имеет n корней (действительных и комплексных), при этом каждый корень засчитывается столько раз, какова его кратность.

Многочлен с действительными коэффициентами нечетной степени всегда имеет, по крайней мере, один действительный корень.

Рассмотрим пример задания.

Задача 2.1. Определить делится ли без остатка многочлен $2x^3$-$3x^2+4x+9$ на двучлен $x+1$.

Решение:

Найдем остаток от деления многочлена $P(x)=2x^3-3x^2+4x+9$ на двучлен $(x+1)$. По теореме Безу остаток будет равен $P(-1)$, так как заданный двучлен можно представить в виде $x+1=x-(-1)$. Найдем значение $P(-1)$ многочлена в точке $x=-1$:

$$P(-1)=2\,(-1)^3 - 3\,(-1)^2 + 4\,(-1) + 0 = -2-3-4+9=0$$

Остаток равен нулю, следовательно, по теореме Безу многочлен $P(x)=2x^3-3x^2+4x+9$ делится на $(x+1)$ без остатка.

Задача 2.2. Разложите на множители многочлен x^3+3x^2+4x+4.

Решение:

Согласно теореме Безу, рациональные и целые корни такого многочлена могут быть только делителями свободного члена (в данном случае он равен четырем).

Выпишем все возможные целые делители числа 4: -4; -2; -1; 1; 2; 4.

Далее поочередно подставляем каждое число в многочлен и убеждаемся, что -2, является его корнем, так как $Q(x) = x^3+3x^2+4x+4$ при $x=-2$ равен нулю.

Соответственно, по теореме Безу данный многочлен можно представить в виде:

$$Q(x) = Q_1(x)\cdot(x+2).$$

Далее необходимо определить коэффициенты многочлена:

$$Q_1(x) = ax^2+bx+c$$

для этого необходимо либо поделить исходный многочлен на (x+2) (отдельно отметим, что данный прием часто применяется при решении задач, связанных с преобразованием многочленом. Поэтому при подготовке к олимпиаде также требует к себе дополнительного внимания), либо воспользоваться обобщенной теоремой Виета, из которой следует, что если дан многочлен степени n и коэффициент при старшем члене равен 1, то коэффициент при x^{n-1} равен сумме корней с противоположным знаком, а произведение корней, умноженное на $(-1)^n$, равно свободному члену. Таким образом получим:

$$-3 = x_1+x_2 + (-2), \text{ следовательно, } x_1+x_2 = -1 = b;$$

$$x_1\cdot x_2\cdot(-2)\cdot(-1)^3 = 4, \text{ следовательно, } x_1\cdot x_2 = 2 = c.$$

Отсюда получаем:

$$Q(x) = Q_1(x)\cdot(x+2) = (x^2+x+2)\cdot(x+2)$$

Заметим, что многочлен $Q_1(x)$ действительных корней не имеет, следовательно, мы получили разложение исходного многочлена на неприводимые множители.

Задача 2.3. Решите уравнение:

$$42x^2-13x(x^2-x+12)+(x^2-x+12)^2=0\,.$$

Решение:

Для решения данного уравнения введем дополнительные переменные:

$$u = x \text{ и } v = (x^2-x+12).$$

Следовательно, получим новое уравнение вида:

$$42u^2-13uv+v^2 = 0.$$

Произведем еще одну замену и обозначим $t=u/v$, получим уравнение вида:

$$42t^2-13t+1 = 0.$$

Данное уравнение решаем через дискриминант или по теореме Виета и получаем корни:

$$t_1=\frac{1}{6};t_1=\frac{1}{7}.$$

Так как на значение t не было введено ограничений, то далее рассматриваем оба корня.

Если $t_1 = \frac{1}{6}$, то $\frac{x}{x^2 - x + 12} = \frac{1}{6}$, откуда получаем x^2-$7x$+12 = 0 и x_1 = 3 и x_2 = 4.

Если $t_2 = \frac{1}{7}$, то $\frac{x}{x^2 - x + 12} = \frac{1}{7}$, откуда получаем x^2-$8x$+12 = 0 и x_3 = 2 и x_4 = 6.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Разложите многочлен $x^4 + 1$ на множители

2. Разложите на множители многочлен $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

3. Разложите на множители многочлен $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

4. Разложите на множители многочлен $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + +x^3 + x^2 + +x + 1$.

5. Решите уравнение: $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$.

6. Разложите многочлен на множители $3x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 10x + 3$.

7. Разложите многочлен на множители $3x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 4x + 3$.

8. Решите уравнение: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

9. Решите уравнение: $(x+1)^4 + (x^2 - x - 2)^2 = 20(x-2)^4$.

10. Решите уравнение: $(x-1)^4 + 5(x^2 - 5x + 4)^2 = 36(x-4)^4$.

11. Решите уравнение: $(x+3)^4 - 7(x^2 + 10x + 21)^2 = 18(x+7)^4$.

12. Решите уравнение: $(x-4)^4 + 4(5x^2 - 28x + 32)^2 = 5(5x-8)^4$.

13. Решите уравнение: $(x+6)^4 - 13(x^2 - 3x - 54)^2 = 48(x-9)^4$.

14. Решите уравнение: $(x+2)^4 - 4(x^2 + 8x + 12)^2 = 45(x+6)^4$.

15. Решите уравнение: $(x-1)^4 + 7(5x^2 + 2x - 7)^2 = 8(5x+7)^4$.

16. Решите уравнение: $(x+8)^4 - 11(x^2 + x - 56)^2 = 80(x-7)^4$.

17. Решите уравнение: $32x^2 - 12x(x^2 + 3x - 6) + (x^2 + 3x - 6)^2 = 0$.

18. Решите уравнение: $4x^2 + 5x(x^2 + 5x + 8) + (x^2 + 5x + 8)^2 = 0$.

19. Решите уравнение: $5x^2 = 4x(x^2 + 4x - 10) + (x^2 + 4x - 10)^2$.

3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Анализ олимпиадных заданий различных лет показывает, что рассматриваемый тип задач является наиболее распространенным. Текстовая задача – это описание некоторой проблемы или проблемной ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику того или иного компонента этой ситуации.

Решение любой текстовой задачи сводится к тому, что мы составляем некоторые математические зависимости между величинами (уравнения, неравенства или их системы), которые необходимо определить в результате решения. Затем анализируем и решаем полученные зависимости и полученные результаты оцениваем с точки зрения реального смысла искомых величин [1].

Несмотря на огромное разнообразие текстовых задач существует ряд наиболее распространенных их видов:

1. Задачи на движение. В них принимаются следующие допуски: считается, что тела движутся прямолинейно и равномерно, скорости постоянны в течение определенных промежутков времени, не меняются при поворотах и т. д., движущиеся тела считаются материальными точками (если не оговорено противное), т.е. их размеры и масса несущественны для решения задачи. Основные типы задач на движение:

- задачи на движение по прямой (навстречу и вдогонку);
- задачи на движение по замкнутой трассе;
- задачи на движение по воде;
- задачи на среднюю скорость;
- задачи на движение протяженных тел.

2. Задачи на работу. В определенном смысле задачи на работу схожи с задачами на движение. Сравните формулы: $S = vt$, $A = Pt$. Роль скорости v здесь играет производительность труда (P), а роль расстояния S – объем работы A, t – время, затраченное на преодоление расстояния или на выполнение некоторого объема работы.

Производительность труда – это объем работы, выполняемый за единицу времени, иначе говоря, скорость выполнения работы. Примеры производительности труда: школьник решает 4 задачи в час или токарь производит 23 детали за смену.

В этих задачах, как правило, весь объем работы считается равным 1, тогда производительность равна $\frac{1}{t}$

3. Задачи на проценты. В большинстве случаев, задачи на проценты сводятся к тому, чтобы найти процент от числа, найти число по проценту, выразить в процентах какую-либо часть, либо выразить в процентном соотношении взаимосвязь между несколькими объектами, числами, величинами.

4. Текстовые задачи, которые решаются в целых числах. Это тип задач, в которых необходимо найти решение в целых числах (в подавляющем большинстве в натуральных числах). Простейшим примером служат задачи, в которых нужно определить количество людей, животных и т.д. при некоторых ограничениях. Естественно, что решение в данном случае может быть только целым неотрицательным числом, так как противоположное противоречит логике. Чаще всего решение задачи сводится к составлению уравнения, системы уравнений и неравенств, имеющих бесконечное количество решений в действительных числах, но имеющая ограниченное количество решений в целых числах.

3.1. Задачи на движение

Задача 3.1.1. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 560 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 56 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Пусть скорость теплохода в неподвижной воде равна x (км/ч). Всего теплоход затрачивает на весь путь 56 часа (время, затраченное на путь от пункта отправления до пункта назначения + время стоянки + время, затраченное на путь обратно).

Зная скорость теплохода в неподвижной воде, вычислим его скорость движения по течению, она равна x+4 (км/ч), и скорость против течения, она равно $x – 4$ (км/ч). С учетом расстояния между пунктами отправления и назначения (560 км) заполним таблицу ниже:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Движение по течению	$x + 4$	$\frac{560}{x+4}$	560
Движение против течения	$x - 4$	$\frac{560}{x-4}$	560

Из таблицы и с учетом общего затраченного теплоходом времени на маршрут получаем уравнение:

$$\frac{560}{x+4}+8+\frac{560}{x-4}=56$$

Преобразуем данное уравнение: все численные значения, не содержащие переменные, сгруппируем в правой части уравнения и произведем вычисления:

$$\frac{560}{x+4}+\frac{560}{x-4}=56-8$$

$$\frac{560}{x+4}+\frac{560}{x-4}=48$$

Обе части уравнения умножим на $\frac{(x+4)\cdot(x-4)}{8}$, в результате получим:

$$\begin{cases} 70(x-4)+70(x+4)=6(x+4)(x-4) \\ x\neq -4 \\ x\neq 4 \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы. В результате преобразований получим квадратное уравнение следующего вида:

$$3x^2-70x-48=0.$$

Найдем дискриминант данного уравнения,

$$D=b^2-4ac=(-70)^2-4\cdot 3\cdot(-48)=5476=74^2$$

Из соотношений ниже находим корни уравнения.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-70)-\sqrt{5476}}{2\cdot 3}=\frac{70-74}{6}=-\frac{2}{3}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-70)+\sqrt{5476}}{2\cdot 3}=\frac{70+74}{6}=\frac{144}{6}=24$$

Так как скорость не может быть отрицательной по смыслу задачи и второй корень уравнения удовлетворяет условия полученной ранее системы, то скорость теплохода в стоячей воде была равна 24 км/ч.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Пункт *B* расположен на расстоянии 200 км к югу от пункта *A*. Из пункта *A* на север вылетел со скоростью 720 км/час первый самолет, а через 10 минут тоже на север из пункта *B* вылетел второй самолет со скоростью 1080 км/час. Через какое время после вылета первого самолета второй самолет опередит его на 270 км?

2. Из пункта *A* с постоянной скоростью выехал мотоциклист, одновременно навстречу ему из пункта *B* тоже с постоянной скоростью выехал велосипедист. Они встретились на расстоянии 3,2 км от пункта *B*, а в момент прибытия мотоциклиста в пункт *B* велосипедист находился на расстоянии 12 км от пункта А. Найдите расстояние между пунктами А и В.

3. Пловец плывет против течения реки (с постоянной скоростью) и встречает плывущую по течению пустую лодку. После этого он продолжает плыть еще 15 минут, а затем поворачивает назад и догоняет лодку на расстоянии 350 метров от места встречи. Найдите скорость течения реки (в км/час).

4. Пароход за 10 часов прошел 110 км по течению реки и 70 км против течения. В другой раз, за такое же время он прошел 88 км по течению и 84 км против течения реки. Найдите скорость парохода в стоячей воде (в км/час).

5. Из пункта *A* по реке отправляется плот. Через час из пункта *A* вниз по течению отправляется катер. Найдите, сколько времени (в часах) потребуется катеру, чтобы догнать плот и возвратиться обратно в пункт *A*, если скорость катера в стоячей воде в 2 раза больше скорости течения реки.

6. Пловец плывет против течения реки (с постоянной скоростью) и встречает плывущую по течению пустую лодку. После этого он продолжает плыть еще 5 минут, а затем поворачивает назад и догоняет лодку на расстоянии 200 метров от места встречи. Найдите скорость течения реки (в км/час).

7. Расстояние между двумя городами по реке 80 км. Моторная лодка, двигаясь по течению, тратит на этот путь на 1 час меньше, чем двигаясь против течения. Скорость течения реки 2 км/час. Найдите скорость лодки (в км/час) в стоячей воде.

3.2. Задачи на работу

Задача 3.2.1. Две машинистки должны были перепечатать рукопись. Сначала первая из них работала 1,5 дня, после чего начала работать вторая, и они печатали вместе в течение 7 дней. На выполнение всей работы одной второй машинистке потребовалось бы на 3 дня меньше, чем первой. За сколько дней может перепечатать рукопись каждая из них в отдельности?

Решение:

Весь объем работы примем за 1. Пусть первая машинистка может перепечатать рукопись за x дней, а вторая – за y дней. Тогда производительность машинисток соответственно:

$\frac{1}{x}$ – часть рукописи перепечатывает первая машинистка за один день,

$\frac{1}{y}$ – часть рукописи перепечатывает вторая машинистка за один день.

Из условия задачи можем составить два уравнения. Первое:

$$x - y = 3,$$

так как на выполнение всей работы второй машинистке потребовалось бы на 3 дня меньше, чем первой.

Второе уравнение:

$$1{,}5 \cdot \frac{1}{x} + 7 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1,$$

получаем из условия, что за 1,5 дня первая машинистка выполнила $1{,}5 \cdot \frac{1}{x}$ часть работы, а за 7 дней их совместной работы они перепечатали $7 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ и после этого работы была завершена, то есть в сумме эти два выражения дают 1.

Таким образом получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 1{,}5 \cdot \frac{1}{x} + 7 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы, в результате получим:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ \frac{17}{2x} + \frac{7}{y} = 1 \end{cases}$$

Решаем систему методом подстановки:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ \dfrac{17}{2x} + \dfrac{7}{x-3} = 1 \end{cases}$$

Решаем второе уравнение и получаем корни: $x_1 = 17$; $x_2 = 3/2$. Однако второй корень является посторонним, так как по смыслу задачи x должно быть больше 3. В противном случае второй машинистке потребовалось бы отрицательное число дней на выполнение работы.

Таким образом получаем, что первой машинистке потребовалось бы 17 дней на выполнение работы, а второй (исходя из первого уравнения системы) – 14 дней.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахивают за 6 дней, а первая и третья вместе – за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за день второй бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за день третьей бригадой?

2. Два мастера, работая вместе, могут выполнить всю работу за 10 дней. Если первый мастер один проработает 7 дней, то оставшуюся часть работы второй мастер может выполнить один за 16 дней. За сколько дней может выполнить всю работу один первый мастер?

3. В Бассейн проведены 4 трубы: через первые 2 трубы вода вливается в бассейн, а через 2 другие выливается. Если работают все 4 трубы, то бассейн наполняется за 3 часа, а если только первая, вторая и четвертая, то бассейн заполняется за 1 час. Если же работают вторая, третья и четвертая труба, то бассейн заполнится за 6 часов. За какое время заполнится бассейн, если будут работать только вторая и четвертая трубы?

4. Бригада по плану производит за день 7200 одинаковых деталей, при этом у всех рабочих одна и та же норма. В бригаде заболели трое рабочих, поэтому чтобы выполнить ежедневный план, каждому из оставшихся пришлось изготовить сверх нормы 400 деталей. Сколько рабочих было в бригаде?

5. В бассейн проведены 4 трубы: через первые 2 трубы вода вливается в бассейн, а через 2 другие выливается. Если работают все 4 трубы, то бассейн наполняется за 15 часов, а если работают только первые 3, то бассейн заполняется за 6 часов. За сколько часов выте-

чет вода из целиком заполненного бассейна, если закрыть первые три трубы и оставить только четвертую?

3.3. Задачи на проценты

Задача 3.3.1. В одном из банков процентная ставка по стандартным вкладам 10% годовых, а для сотрудников 12%. Менеджер банка сделал вклад 300 тыс. руб., но ровно через год уволился со своего места работы, но вклад решил сохранить с меньшей процентной ставкой. На какую сумму увеличится первоначальная сумма вклада через 3 года.

Решение:

Данную задачу можно решить двумя способами. Рассмотрим сначала наиболее очевидный из них, решим задачу по действиям.

1. Так как в первый год процентная ставка составляла $C_1 = 12\% = 0{,}12$, то к его концу на счету клиента, с учетом начального вклада $A_0 = 300$ тыс. руб., стало:

$$A_1 = A_0(1+C_1) = 300\cdot(1+0{,}12) = 336 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогично, к концу второго года, с учетом изменившейся ставки ($C_2 = 10\% = 0{,}1$), на счету у клиента стало:

$$A_2 = A_1(1+C_2) = 336\cdot(1+0{,}1) = 369{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

И на третий год:

$$A_3 = A_2(1+C_2) = 369{,}6\cdot(1+0{,}1) = 406{,}56 \text{ тыс. руб.}$$

За 3 года первоначальная сумма увеличилась на:

$$A_3 - A_0 = 406{,}56 - 300 = 106{,}56 \text{ тыс. руб.}$$

Второй способ решения подобной задачи – это использование формулы сложного процента:

$$A_n = A_0(1+C)^n,$$

где A_n – сумма, накопленная через n – количество лет при фиксированной процентной ставке C;

A_0 – величина первоначального вклада.

Для решения поставленной задачи сначала вычислим накопленную сумму при ставке в 12%, а затем накопленную сумму за 2 года при ставке 10%. Таким образом можно сократить решение задачи на одно действие.

Задания для самостоятельного выполнения

1. 500 кг руды содержит некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих 12,5 % железа, процент

железа в руде повысился в 1,5 раза. Сколько килограммов железа осталось в руде после удаления указанных 200 кг примесей?

2. Смешали раствор, содержащий 30% соляной кислоты, с раствором, содержащим 10% соляной кислоты. В результате получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов 30%-ного раствора было взято?

3. На автомобиль сначала подняли цену на 100 %, а затем повысили еще на 150 %. Какой процент составляет первоначальная цена автомобиля от его конечной цены?

4. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4% примесей. Сколько выплавят металла (в тоннах) из 24 тонн руды?

5. Изделие стоит 500 рублей (его стоимость складывается из стоимости материала и затрат на изготовление). Стоимость изделия не изменилась после того, как стоимость материала возросла вдвое, а затраты на изготовление сократились на 25%. Найдите первоначальную стоимость материала (в рублях).

6. Два цеха должны были выпустить по плану 180 станков в год. Первый цех выполнил работу на 112%, а второй на 110%, поэтому вместе они выполнили 500 станков. Сколько станков сверх плана выпустил второй цех?

7. Дан кусок латуни. Если его сплавить с 3 кг чистой меди, то получится сплав, содержащий 90% меди. Если бы этот кусок латуни сплавили с другим куском латуни, весом 2 кг и содержащим 90% меди, то получили бы сплав, содержащий 85% меди. Сколько килограммов меди содержал данный кусок латуни?

3.4. Текстовые задачи, которые решаются в целых числах

Задача 3.4.1. Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду - 14 кг, льву - 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда - 160, у каждой лисы - 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

Решение:

Пусть x, y, z - количество лис, леопардов и львов соответственно. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «При каких натуральных x, y и z, таких, что $2x+14y+21z = 111$, выражение $20x+160y+230z$ принимает наибольшее значение?» Пусть

t=2x+16y+23z. Выразив х через t, y и z и подставив в первое уравнение, получим систему:

$$\begin{cases}(t-16y-23y)+14y+21z=111,\\ 2x=t-16y-23z;\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}t=2y+2z+111,\\ 2x=t-16y-23z.\end{cases}$$

Значит, t максимально, когда максимально y+z. Это означает, что леопардов и львов в сумме должно быть как можно больше. Но так как леопард съедает меньше мяса, чем лев, надо брать как можно больше леопардов. При этом наибольшее возможное число леопардов - семь, иначе им не хватит на всех 111 кг мяса. Пусть y=7. Имеем:

$$\begin{cases}t=14+2z+111,\\ 2x=t-112-23z;\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}t=2z+125,\\ 2x=13-21z\end{cases}$$

Так как 2x > 0 то и 13-21z > *0*, следовательно, z = 0 поскольку z - натуральное число. Но тогда x не является целым числом, поэтому последняя система решений не имеет. Пусть y=6. Имеем:

$$\begin{cases}t=12+2z+111,\\ 2x=t-96-23z;\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}t=2z+123,\\ 2x=27-21z\end{cases}$$

Так как 2x ≥ 0, то и 27 – 21x ≥0, следовательно, z=0 или z=1, поскольку z- натуральное число. Если z=0, то x не является целым числом, если z=1, то x=3.

Ответ: 3 лисы, 6 леопардов и 1 лев.

Задания для самостоятельного выполнения

1. На полевых работах геологу нужно собрать образцы типов А и В. Вес одного образца типа А равен 3 кг, а типа В – 4 кг. По каждому из образцов типа А требуется провести 5 видов анализов, а по каждому из образцов типа В – 7 видов. Известно, что вес всех собранных образцов не должен превышать 149 кг, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее 249. Какое минимальное и максимальное суммарное количество образцов типов А и В можно собрать при указанных условиях?

2. Найдите 4 натуральных числа, если каждое из них, начиная со второго, на 7 больше предыдущего, а среднее арифметическое этих чисел равно 22,5.

3. Найдите двузначное число n, если произведение его цифр равно 28, а его сумма с числом, записанным этими же цифрами, но в обратном порядке равна 121.

4. Группа студентов из 30 человек получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок» и меньше, чем «четверок». Кроме того, известно, что число «четверок» делилось на 10, число «пятерок» было четным. Сколько студентов за экзамен получили «пятерки», «четверки», «тройки» и «двойки»?

5. Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а 3 тетради и 1 блокнот на 36 рублей стоят меньше, чем 5 ручек. Какова цена каждого предмета в отдельности, если каждый предмет стоит целое число рублей и цена тетради – четное число рублей?

6. Длины сторон прямоугольника выражаются целыми числами. Его площадь равна 2015 см^2 а периметр меньше 200 см. Найдите длины сторон этого прямоугольника.

7. Известно, что в первом пруду плавают n рыб, причем их количество больше, чем 400, но меньше, чем 600. Количество рыб во втором пруду равно m, причем $n : m = 47:36$, кроме того, число m можно получить, поменяв местами первую и последнюю цифры в числе n. Найдите количество рыб в первом пруду.

8. Для нумерации страниц орфографического словаря было использовано 4493 цифры. Найдите количество страниц в словаре.

9. Фермерское хозяйство производит молоко, которым можно целиком заполнить некоторое количество бидонов по 50 литров каждый. Если это молоко разливать в сорокалитровые бидоны, то их понадобится на 5 бидонов больше, чем пятидесятилитровых, при этом один бидон будет неполным. Если же это молоко разливать в бидоны по 70 литров, то их понадобится на 4 бидона меньше, чем пятидесятилитровых, и один бидон тоже окажется неполным. Сколько литров молока произвело фермерское хозяйство?

4. ПЛАНИМЕТРИЯ

Задачи по геометрии также широко используются при проведении олимпиадных мероприятий среди школьников. Геометрия достаточно разнообразна и включает набор различных тем, которые могут быть использованы при составлении заданий. Однако нужно отметить, что они требуют особого подхода: в первую очередь умения представлять фигуры в пространстве и на плоскости и соответственно составлять чертежи; во-вторых, геометрические задачи имеют большое количество способов и подходов при их решении. При этом могут быть использованы графические, аналитические и другие методы.

В данном разделе рассмотрим лишь несколько задач с решением, которые демонстрируют общие подходы.

Задача 4.1. Докажите, что у равнобедренной трапеции диагонали и равны. Найдите длину этих диагоналей, если высота трапеции равна h, большее основание – 2a, а меньшее – 2b.

Решение:

Построим чертеж (рис.4.1) согласно условию задачи, с учетом следующих обозначений: $MNPQ$ – данная равнобедренная трапеция, высота которой равна h, а основание MQ и NP равны $2a$ и $2b$, соответственно. Введем декартову систему координат (далее ДСК) XOY так, что OY перпендикулярна основаниям и проходит через их середины, а ось OX проходит через MQ. Центр системы координат точка O. Докажем, что OY действительно проходит через середины NP и MQ. Пусть OY пересекает MQ в точке O, а NP в точке S.

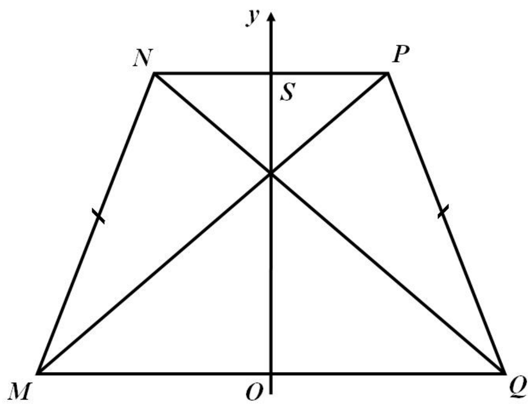


Рис. 4.1

$\angle M = \angle Q$, треугольники ΔMNO и ΔQPO равны по первому признаку, но тогда $NO = OP$, т.е. ΔNOP – равнобедренный, OS - медиана и высота, тогда $OS \perp NP$, $NP \parallel MQ$ и $OS \perp MQ$. Координаты вершин трапеции такие: M (-a; 0), Q (a; 0), N (-b; h), P (b; h). Тогда найдем диагонали трапеции:

$$MP = \sqrt{(b+a)^2 + h^2} = \sqrt{(a+b)^2 + (-h)^2} = \mathrm{NQ}$$

Данная задача имеет и другие способы решения, однако выбранный метод демонстрирует возможность достаточно широкого применения при решении геометрических задач на плоскости.

Задача 4.2. Окружность с центром в точке O проходит через концы гипотенузы прямоугольного треугольника и пересекает его катеты в точках M и K. Докажите, что расстояние от точки O до прямой MK равно половине гипотенузы. Задача и решения взяты из материалов, подготовленных А. Блинковым, Ю. Блинковым, А. Горской, А. Заславским к Двенадцатой всероссийской олимпиады по геометрии им. И.Ф. Шарыгина. Четырнадцатая устная олимпиада по геометрии.

Решение:

Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник, точки L и N – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на прямые AB и MK соответственно (рис.4.2.).

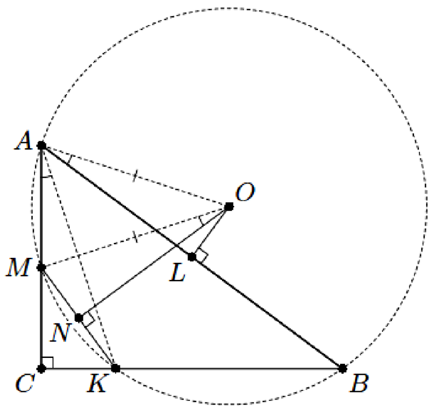


Рис. 4.2

Докажем, что треугольники MON и OAL равны, откуда и будет следовать утверждение задачи. Заметим, что гипотенузы у них равны, как радиусы, то есть достаточно доказать равенство углов MON и OAL.

Пусть $\angle MON=\alpha$, тогда центральный угол MOK равен 2α, а соответствующий ему вписанный угол MAK равен α. Далее, вписанный в окружность угол AKB равен $90°+\alpha$ как внешний угол треугольника CAK. Следовательно, центральный угол AOB, опирающийся на меньшую дугу AB равен $180°-2\alpha$, то есть $\angle OAL = \angle OAB = \alpha$, что и требовалось.

Отметим, что задача и ее решение аналогичны формулировке и доказательству следующего известного факта: если во вписанном в окружность четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то расстояние от центра окружности до его стороны равно половине противолежащей стороны.

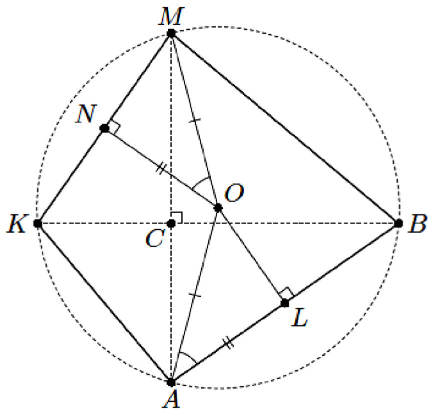


Рис. 4.3

В нашем же случае, хорды AM и BK окружности являются перпендикулярными сторонами четырехугольника.

Задача 4.3. Дан квадратный лист бумаги со стороной 2016. Можно ли, согнув его не более десяти раз, построить отрезок длины 1? Задача и решения взяты из материалов, подготовленных А. Блинковым, Ю. Блинковым, А. Горской, А. Заславским к Двенадцатой всероссийской олимпиады по геометрии им. И.Ф. Шарыгина. Четырнадцатая устная олимпиада по геометрии.

Решение:

Заметим, что мы можем поделить пополам любой отрезок, совместив его концы. Кроме того, можно перегнуть бумагу по прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данной прямой. Иными словами, мы умеем строить середины отрезков и перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку. Воспользуемся при решении задачи этими построениями и тем, что $2016 = 32\cdot 63$.

Перегнем квадрат $ABCD$ по диагонали BD, а затем шесть раз по перпендикулярным ей прямым так, что эта диагональ разделится на 64 равных части. Пусть X_1 и X_2 лежат на диагонали BD, причем $BX_1 = X_1X_2 = \dfrac{1}{64} BD$.

Пусть прямая AX_1 пересекает BC в точке Y. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках:

$$\frac{BY}{BC} = \frac{BY}{AD} = \frac{BX_1}{X_1D} = \frac{1}{63}$$

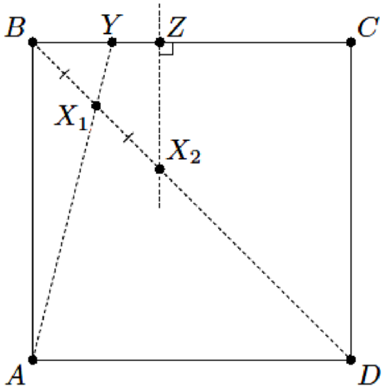


Рис. 4.4

Рассмотрев точку Z – проекцию X_2 на BC, получим:

$$\frac{BZ}{BC} = \frac{BX_2}{BD} = \frac{1}{32}$$

Поэтому, перегнув по прямым AX_1 и X_2Z, а затем по прямой, проходящей через Y и перпендикулярной BC, получим отрезок длины $2BY - BZ = 1$.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Периметр параллелограмма равен 12, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 2. Найдите стороны параллелограмма.

2. Сторона BC параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N, причем MN = 12. Найдите стороны параллелограмма.

3. Из вершины B острого угла ромба ABCD проведены перпендикуляры BE и BK к прямым CD и AD соответственно. Длина каждого перпендикуляра равна 3, а длина отрезка KE равна $3\sqrt{3}$. Найдите диагонали ромба.

4. В треугольник с периметром, равным 2p, вписана окружность. К ней проведена касательная, параллельная стороне треугольника. Найдите наибольшую возможную длину отрезка касательной, концы которого принадлежат сторонам треугольника.

5. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R. Точка D лежит на дуге BC, хорды AD и BC пересекаются в точке M. Найдите длину стороны BC, если угол BMD равен 120°, AB равно R и BM : MC = 2 : 3.

6. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведенной из вершины прямого угла.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD:DC = 1:4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

8. Большее основание AD трапеции $ABCD$ равно a, а меньшее – $BC = b$. Диагональ AC разделена на три равные части и через ближайшую к A точку деления M проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между диагоналями.

9. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная BC, пересекает сторону AD в точке M. Докажите, что EM – медиана треугольника AED. Найдите ее длину, если $AB = 7$, $CE = 3$ и угол $ADB = \varphi$.

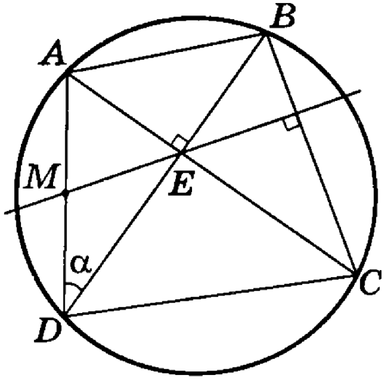


Рис. 4.5

5. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

5.1. Кинематика

В последующих главах данного пособия рассмотрим основные разделы физики с решением некоторых типовых задач.

Введем некоторые основные термины и определения по данному разделу.

Кинематика – раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа и т.д.) движения идеализированных тел (материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальная жидкость), без рассмотрения причин движения (массы, сил и прочее). Исходные понятия кинематики – пространство и время. Например, если тело движется по окружности, то кинематика предсказывает необходимость существования центростремительного ускорения без уточнения того, какую природу имеет сила, его порождающая.

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется **материальной точкой**. Однако нужно помнить, что всякое тело имеет определенные размеры, и различные части тела находятся в разных местах пространства.

Механическим движением тела называют изменение его положения в пространстве относительно других тел с течением времени. Механическое движение относительно. Движение одного и того же тела относительно разных тел оказывается различным. Для описания движения тела нужно указать, по отношению к какому телу рассматривается движение. Это тело называют телом отсчета.

Перемещаясь с течением времени из одной точки в другую, тело (материальная точка) описывает некоторую линию, которую называют **траекторией движения тела**.

Криволинейное движение можно представить, как движение по набору дуг окружностей (рис. 5.1).

Положение материальной точки в пространстве в любой момент времени (закон движения) можно определять либо с помощью зависимости координат от времени $x = x\ (t)$, $y = y\ (t)$, $z = z\ (t)$ – координатный способ; либо при помощи зависимости от времени радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}\left(t\right)$, проведенного из начала координат до данной точки – векторный способ.

Перемещением тела $\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ называют направленный отрезок прямой, соединяющий начальное положение тела с его последующим положением. Перемещение есть векторная величина.

Пройденный путь l равен длине дуги траектории, пройденной телом за некоторое время t. Путь – скалярная величина.

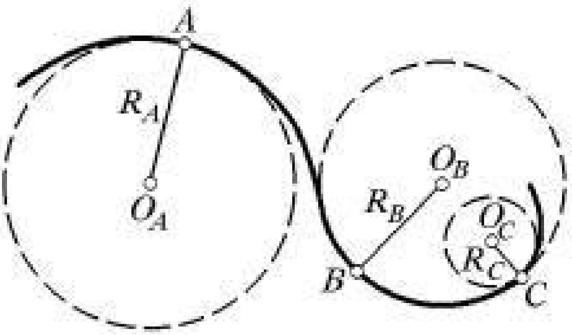


Рис. 5.1. Представление криволинейной траектории в виде набора окружностей

Рассмотрим основные типы задач по данному разделу. Первый тип задач связан с определением координаты, скорости и других величин при различных типах движения в заданный момент времени; второй – с определением средней скорости на всем участке движения.

Задача 5.1.1. Материальная точка движется равномерно, прямолинейно и в направлении оси координат OX. Установить соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать.

Физическая величина	Формула
Координата точки	$s = \vartheta t$
Путь, пройденный за время t со скоростью υ	$s = \vartheta_0 t + \dfrac{at^2}{2}$
	$x = x_0 - \vartheta t$
	$x = x_0 + \vartheta t$

Решение:

Заданный вид движения является самым простым видом механического движения из всех, в данном случае:

$$\upsilon = \text{const}.$$

Для любого момента времени уравнение равномерного прямолинейного движения записывается следующим образом

$$x(t) = x_0 + \upsilon t.$$

Равномерность движения предполагает постоянство скорости по модулю, а прямолинейность − по направлению. Формулу для определения средней скорости для данного типа движения можно представить так:

$$\vartheta = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - x_2},$$

Следовательно: $s = \vartheta t$

Задача 5.1.2. Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 120 км – со скоростью 80 км/ч, а затем 150 км – со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение:

Немного обратимся к теории. Напомним, что **средняя (путевая) скорость** – это отношение длины пути, пройденного телом, ко времени, за которое этот путь был пройден, она, в отличие от мгновенной скорости, не является векторной величиной.

Средняя скорость равна среднему арифметическому от скоростей тела во время движения только в том случае, когда тело двигалось с этими скоростями одинаковые промежутки времени. (В случае, если тело двигалось с разными скоростями неодинаковые промежутки времени, среднюю скорость можно вычислить как взвешенное среднее арифметическое этих скоростей с весами, равными соответствующим промежуткам времени.)

В то же время если, например, половину пути автомобиль двигался со скоростью 180 км/ч, а вторую половину со скоростью 20 км/ч, то средняя скорость будет 36 км/ч. В примерах, подобных этому, средняя скорость равна среднему гармоническому всех скоростей на отдельных, равных между собой, участках пути. Если участки пути, по которому двигалось тело с разными скоростями, не равны между собой, то средняя скорость будет равна взвешенному среднему гармоническому всех скоростей с весами — длинами соответствующих этим скоростям участков пути.

Таким образом, в рамках рассматриваемой задачи необходимо весь путь разделить на всё время движения. В задаче сказано о трёх участках пути, следовательно, общая формула для вычисления средней скорости будет иметь вид:

$$\vartheta_{средняя} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\frac{S_1}{\vartheta_1} + \frac{S_2}{\vartheta_2} + \frac{S_3}{\vartheta_3}}$$

Подставляем известные значения:

$$\vartheta_{средняя} = \frac{120+120+150}{\frac{120}{60}+\frac{120}{80}+\frac{150}{100}} = \frac{390}{5} 78\, км/ч$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Путешественник переплыл море на яхте со скоростью 17 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 323 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

2. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующий час – со скоростью 100 км/ч, а затем два часа – со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

3. Первые 190 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км – со скоростью 90 км/ч, а затем 170 км – со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

4. Группа туристов, двигаясь цепочкой по обочине дороги со скоростью 3,6 км/ч, растянулась на 200 м. Замыкающий посылает велосипедиста к вожатому, который находится впереди группы. Велосипедист едет со скоростью 7 м/с; выполнив поручение, он тут же возвращается к замыкающему группы с той же скоростью. Через сколько времени после получения поручения велосипедист вернулся обратно?

5. Школьники побывали в музее-имении Л.Н. Толстого «Ясная поляна» и возвращались в Рязань на автобусах, которые ехали со скоростью υ_1 = 70 км/ч. Пошел дождь, и водители снизили скорость до υ_2 = 60 км/ч. Когда дождь кончился, до Рязани оставалось проехать S = 40 км. Автобусы поехали со скоростью υ_3 = 75 км/ч и въехали в Рязань в точно запланированное время. Сколько времени шел дождь? Чему равна средняя скорость автобуса? Для упрощения считайте, что автобусы в пути не останавливались.

6. Туристы прошли на север 4 км, затем довернули на восток и прошли еще 3 км. Найдите путь и перемещение туристов за все время движения. Нарисуйте траекторию их движения.

7. Два автомобиля движутся прямолинейно и равномерно в одном и том же направлении со скоростями 54км/ч и 36 км/ч. В начальный момент времени t = 0 расстояние между ними равно 18 км. За какое

время первый автомобиль догонит идущий впереди второй автомобиль? Задачу решите аналитически и графически.

8. Линейная скорость точек, лежащих не рабочей поверхности точильного камня, равна 12,56 м/с, а его диаметр равен 0,4 м. Определите угловую скорость, частоту и период вращения камня. Сколько оборотов точильный камень сделает за 1 мни? На какой угол он повернется за это же время?

9. Зависимость координаты тела x от времени t задана уравнением: $x(t) = 20 - 6t + 2t^2$. Через сколько секунд после начала движения проекция вектора скорости тела на ось OX станет равной нулю?

5.2. Динамика

Динамика – раздел механики, в котором изучаются причины возникновения механического движения. Динамика оперирует такими понятиями, как масса, сила, импульс, момент импульса, энергия.

Исторически сложились две основные задачи динамики:

- прямая задача динамики: по заданному характеру движения определить равнодействующую сил, действующих на тело.
- обратная задача динамики: по заданным силам определить характер движения тела.

В основу динамики взяты три закона Ньютона.

Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчета, относительно которых тело движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела, или действия других тел компенсируются; эти системы отсчета называются инерциальными.

Если система отсчета является инерциальной, то любая другая система отсчета, движущаяся относительно нее равномерно и прямолинейно, также инерциальна. Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, являются неинерциальными.

Принцип относительности Галилея. Во всех инерциальных системах отсчета при одинаковых начальных условиях все механические явления протекают одинаково.

Инерция – это явление сохранения скорости тела.

Инертность – это свойство тела, заключающееся в его способности сохранять скорость. Более инертными являются тела, которые медленнее изменяют свою скорость. Мерой инертности является масса.

Масса тела – физическая величина, количественно характеризующая инертность тела.

Второй закон Ньютона. Ускорение тела прямо пропорционально действующей силе и обратно пропорционально его массе: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета.

Сила – физическая величина, характеризующая действие одного тела на другое, является векторной величиной. Если на тело действует несколько сил, то векторная сумма всех сил равна произведению массы на ускорение.

Третий закон Ньютона. Два тела взаимодействуют друг с другом силами, равными по величине и противоположными по направлению:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Также в рамках раздела «Динамика» рассмотрим закон Гука и Всемирного тяготения.

Закон Гука. Сила упругости, возникающая при деформации тела, пропорциональна удлинению тела и направлена противоположно направлению перемещения частиц тела относительно других частиц при деформации:

$$\left(F_{упр}\right)_x = -kx$$

Закон всемирного тяготения. Тела притягиваются друг к другу с силой, модуль которой пропорционален произведению их масс и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

Одно из проявлений силы всемирного тяготения – сила притяжения тела к Земле, называемая также силой тяжести.

$$\vec{F} = m\vec{q}$$

Рассмотри несколько примеров решения задач по данному разделу.

Задача 5.2.1. Тело, движущееся под действием постоянной силы, прошло в первую секунду путь 25 см. Определите величину силы, если масса тела 500 г.

Решение:

Дано: s = 25 см = 0,25м

υ_0 = 0 м/с

t = 1 с

m = 0,5 кг

Найти: F

Тело движется равноускорено под действием постоянной силы из состояния покоя. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ если на тело действует лишь одна сила:

$$F_x = ma_x \Rightarrow F = ma$$

Ускорение можно найти из уравнения $S_x = V_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$ Так как проекция скорости $V_{0x} = 0$, то

$$s = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2}$$

Подставив выражение для ускорения во второй закон Ньютона, получим

$$F = \frac{2ms}{t^2}$$

$$\left[F\right] = \frac{кг \cdot м}{c^2} = H$$

$$F = \frac{2 \cdot 0,5кг \cdot 0,25м}{1c^2} = 0,25H$$

Задача 5.2.2. Изменяются ли перечисленные в скобках величины (Скорость, Ускорение, Кинетическая энергия, Потенциальная энергия, Полная механическая энергия) для Марса, миновавшего афелий, если изменяются, то как? Афелий − точка орбиты Марса, самая удалённая от Солнца. Для каждой величины определить соответствующий характер изменения:

1. не изменяется;
2. только увеличивается по модулю;
3. только уменьшается по модулю;
4. увеличивается по модулю и изменяется по направлению;
5. уменьшается по модулю и изменяется по направлению;
6. увеличивается по модулю и не изменяется по направлению;
7. уменьшается по модулю и не изменяется по направлению.

Решение:

Движение Марса, находящегося на эллиптической стационарной орбите, опишем с помощью второго закона Ньютона, с учетом действующей на него силой гравитации:

$$ma_n = G\frac{Mm}{R^2} \to a_n = G\frac{M}{R^2} \to \frac{v^2}{R} = G\frac{M}{R^2} \to v = \sqrt{G\frac{M}{R}},$$

где m – масса Марса, M – масса Солнца, G – гравитационная постоянная, R – расстояние от центра масс Солнца до центра масс Марса, v – линейная скорость кометы, a_n – нормальное ускорение.

На рис. 5.2. представлена общая схема движения Марса вокруг Солнца.

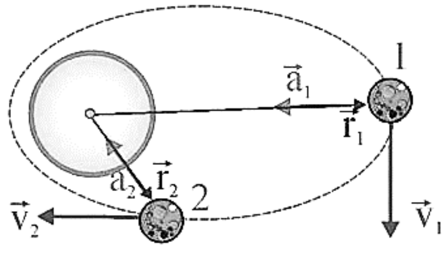


Рис. 5.2

Таким образом, исходя из представленной выше формулы и рис. 5.2:

- линейная скорость планеты в точке орбиты 1 будет меньше скорости в точке орбиты 2, потому что $r_1 > r_2$;
- при перемещении Марса из точки 1 в точку 2 векторы линейной скорости и ускорения будут изменять направление;
- кинетическая энергия скалярная, всегда положительная величина при переходе из 1 в 2 будет увеличивать своё значение, т.к. при возрастающей скорости будет возрастать и величина:

$$E_к = \frac{mv^2}{2}$$

- потенциальная энергия Марса равна:

$$E_п = G\frac{mM}{R}$$

- и соответственно уменьшает свое значение.

Если систему Солнце – Марс рассматривать как замкнутую, подверженную только действию гравитационных сил, то будет справедлив закон сохранения энергии, потому что гравитационные силы относятся к классу консервативных, т.е. полная механическая энергия планеты во всех токах его эллиптической орбиты будет сохранять своё значение.

Итоговый ответ оформим в виде таблицы:

Величина	Характер изменения
Скорость	4
Ускорение	4
Кинетическая энергия	2
Потенциальная энергия	3
Полная механическая энергия	1

Задания для самостоятельного выполнения

Под действием силы тяжести *mg* груза и силы *F* рычаг, находится в равновесии (рис. 5.3). Если модуль силы равен 120Н, то чему равен модуль силы тяжести?

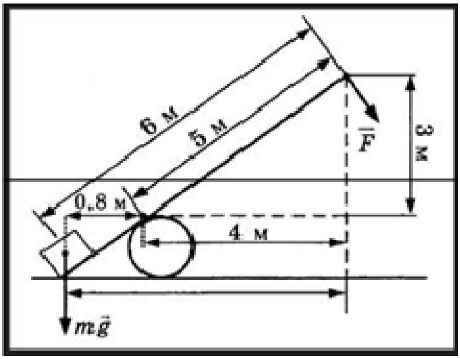


Рис. 5.3

Комета движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. Как изменяются скорость, ускорение, кинетическая энергия, потенциальная энергия и полная механическая энергия при приближении кометы к Солнцу, если считать, что на неё действует только тяготение звезды. Для каждой величины определить соответствующий характер изменения:

- не изменяется;
- только увеличивается по модулю;
- только уменьшается по модулю;
- увеличивается по модулю и изменяется по направлению;
- уменьшается по модулю и изменяется по направлению;

- увеличивается по модулю и не изменяется по направлению;
- уменьшается по модулю и не изменяется по направлению.

3. Птица в клетке-ящике сидит на дне. Ящик с ней уравновешен на весах. Нарушится ли равновесие весов, если птица взлетит?

4. На одной чаше весов находится сосуд с водой, а на другой – штатив, на котором подвешено алюминиевое тело массой 54 г. При этом весы находятся в равновесии. Нарушится ли равновесие весов, если тело погрузить в воду, не касаясь его дна и стенок? Груз какой массы и на какую чашу надо положить, чтобы восстановить равновесие?

5. Напишите уравнение скорости движения реактивного самолета, начинающего разбег по взлетной полосе аэродрома, если результирующая сила тяги двигателя равна 90 кН, а масса его равна 60т.

6. Если к телу массой 30 кг приложить силу F = 90Н под углом 60° к горизонту, тело будет двигаться равномерно. С каким ускорением будет двигаться это тело, если ту же силу приложить под углом 30° к горизонту?

7. Космическая ракета «Мечта» стала первой искусственной планетой Солнечной системы, удаленной от центра Солнца в среднем на расстояние $1{,}7\cdot10^8$ км. Оцените скорость движения по орбите и период ее обращения вокруг Солнца.

8. Тележка массой 10 кг под действием некоторой силы движется с ускорением 0,4 м/с^2. Какой массы груз следует положить на тележку, чтобы под действием той же силы ускорение тележки с грузом стало 0,1 м/с^2? Трением в условиях данной задачи пренебречь.

9. Под действием некоторой силы тележка, двигаясь из состояния покоя, прошла путь 40 см. Когда на тележку положили груз 200 г, то под действием той же силы за то же время тележка прошла из состояния покоя путь 20 см. Какова масса тележки? Силы трения при решения задачи считать равными нулю.

10. С какой начальной скоростью нужно бросить вертикально вниз тело с высоты 9,8 м, чтобы оно упало на 0,5 с быстрее тела, свободно падающего с той же высоты?

6. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Электрический ток – упорядоченное движение заряженных частиц под действием сил электрического поля или сторонних сил. За направление тока выбрано направление движения положительно заряженных частиц.

Электрический ток называют постоянным, если сила тока и его направление не меняются с течением времени. Для существования постоянного электрического тока необходимо наличие свободных заряженных частиц и наличие источника тока, в котором осуществляется преобразование какого-либо вида энергии в энергию электрического поля.

Электродвижущей силой источника тока (ε) называют отношение работы сторонних сил ($A_{\text{ст}}$) к величине положительного заряда (q), переносимого от отрицательного полюса источника тока к положительному:

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q}.$$

Сила тока – скалярная физическая величина, равная отношению заряда, прошедшего через проводник, ко времени, за которое этот заряд прошел:

$$I = \frac{q}{t},$$

где I – сила тока,

q – величина заряда (количество электричества),

t – время прохождения заряда.

Напряжение – скалярная физическая величина, равная отношению полной работе кулоновских и сторонних сил при перемещении положительного заряда на участке к значению этого заряда:

$$U = \frac{A}{q}$$

где U – напряжение,

A – полная работа сторонних и кулоновских сил,

q – электрический заряд.

Электрическое сопротивление – физическая величина, характеризующая электрические свойства участка цепи:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S}$$

где R – сопротивление на участке цепи,

ρ – удельное сопротивление проводника,

l – длина участка проводника,

S – площадь поперечного сечения проводника.

Ниже рассмотрим основные законы, знание которых необходимо для решения задач данного раздела.

Закон Ома для однородного участка цепи. Сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна напряжению при постоянном сопротивлении участка и обратно пропорциональна сопротивлению участка при постоянном напряжении:

$$I = \frac{U}{R}$$

Этот закон применяется для расчета показателей любого участка цепи, в простых случаях (когда все элементы соединены параллельно или последовательно) его достаточно, чтобы определить всех характеристик.

Напомним, что при последовательном соединении элементов цепи (рис. 6.1):

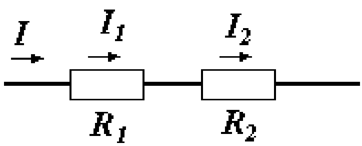


Рис. 6.1

- сила тока одинакова:

$$I_1 = I_2 = I$$

- сопротивление всего участка равно сумме сопротивлений всех отдельно взятых проводников:

$$R = R_1 + R_2$$

- падение напряжения на всем участке равно сумме паданий напряжений на всех отдельно взятых проводниках:

$$U = U_1 + U_2$$

• напряжения на последовательно соединенных проводниках пропорциональны их сопротивлениям.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

При параллельном соединении проводники подсоединяются к одним и тем же точкам цепи (рис. 6.2):

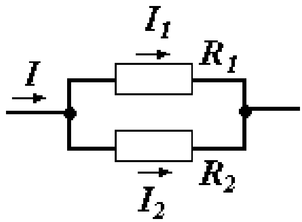


Рис. 6.2

• сила тока в неразветвленной части цепи равна сумме токов, текущих в каждом проводнике:

$$I = I_1 + I_2$$

• падение напряжения во всех проводниках одинаково:

$$U = U_1 = U_2$$

• величина, обратная сопротивлению разветвленного участка, равна сумме обратных величин обратных сопротивлениям каждого отдельно взятого проводника:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

• силы тока в проводниках обратно пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Для расчета сложных электрических цепей, в которых невозможно все соединения элементов свести к только параллельным или последовательным (рис. 6.3), применяют законы Кирхгофа.

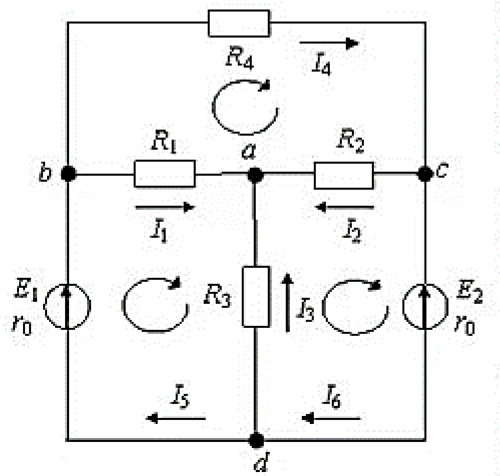


Рис. 6.3

Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле (точка разветвленной цепи, в которой сходится более двух проводников), равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

где n – число проводников, сходящихся в узле,

I_i – сила тока в проводнике.

Токи, входящие в узел, считают положительными, токи, отходящие из узла – отрицательными.

Второй закон Кирхгофа. В любом произвольно выбранном замкнутом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма произведений сил токов и сопротивлений каждого из участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС в контуре:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k$$

Чтобы учесть знаки сил токов и ЭДС выбирается определенное направление обхода контура (по часовой стрелке или против нее). Положительными считают токи, направление которых совпадает с направлением обхода контура, отрицательными считают токи противоположного направления. ЭДС источников электрической энергии считают положительными если они создают токи, направление которых совпадает с направлением обхода контура, в противном случае - отрицательными.

Рассмотрим две задачи, связанные с расчетом параметров электрической цепи.

Задача 6.1. Определите общее сопротивление R_0 участка цепи, изображенного на рисунке 6.4.

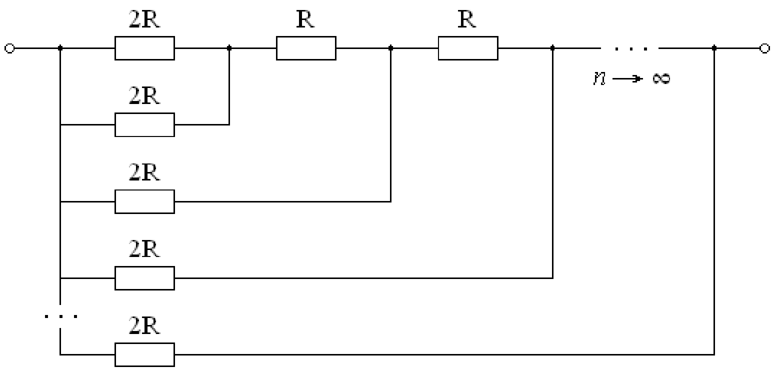
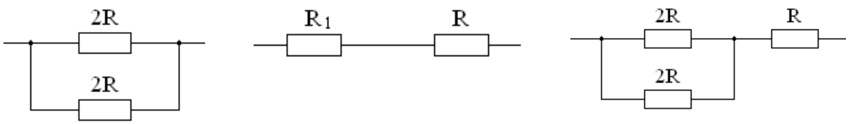


Рис. 6.4

Решение:

На первый взгляд задача кажется сложной и не имеющей простого и точного решения, однако, это не так. Обратим внимание на то, что сопротивление R_1 участка цепи (рис. 6.5, *а*), состоящего из двух параллельно соединенных проводников сопротивлением по 2R равно R.

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}=\frac{2}{2R}=\frac{1}{R}\rightarrow R_1=R$$



а *б* *в*

Рис. 6.5

Рассчитаем сопротивление R_2 участка цепи, изображенного на рис. 6.5, *б*. Два элемента соединены последовательно, следовательно:

$$R_2 = R_1 + R = R + R = 2R.$$

Заменив данный участок цепи проводником с сопротивлением $2R$ (рис. 6.5, *в*), мы опять получаем два параллельно соединенных проводника с сопротивлениями по $2R$.

Фактически мы вернулись к первоначальной схеме. Проведя аналогичные расчеты n раз, мы, получим, что и общее сопротивление данного участка цепи так же равно $2R$.

Задача 6.2. Исходя из данных параметров цепи, изображенной на рисунке 6.6, определить ЭДС четвертого источника и токи I_1, I_2, I_3, I_4. R_1 = 130 Ом, R_2 = 100 Ом, R_3 = 150 Ом, R_4 = 200 Ом, R_5= 80 Ом, E_1 = = 30 В, E_2 = 60 В, E_3 = 80 В.

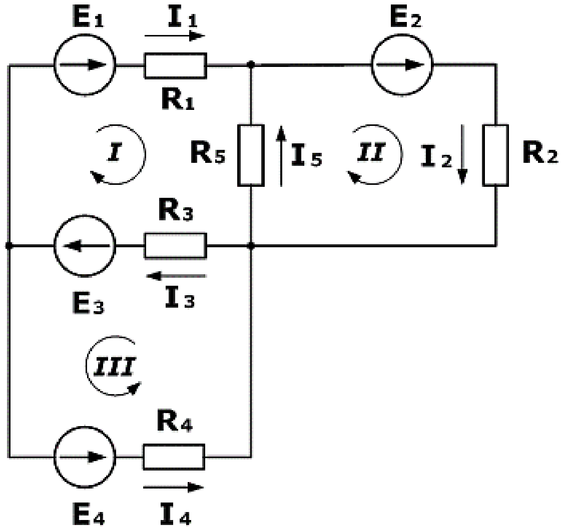


Рис. 6.6

Решение:

Общую схему подобных задач можно представить следующим алгоритмом:

- произвольно выбирают направление токов во всех участках цепи;
- первое правило Кирхгофа записывают для (m-1) узла, где m – число узлов в цепи;
- выбирают произвольные замкнутые контуры, и после выбора направления обхода записывают второе правило Кирхгофа;

- система из составленных уравнений должна быть разрешимой: число уравнений должно соответствовать количеству неизвестных.

В соответствии с представленным алгоритмом решим задачу.

Начнем решение с составления уравнений на основании первого закона Кирхгофа. Количество уравнений m-1= 2

$$I_3 - I_1 - I_4 = 0$$
$$I_5 + I_1 - I_2 = 0$$

Затем составляем уравнения по второму закону для трех контуров. Учитываем направления обхода: если направление тока через резистор совпадает с направлением обхода, берем со знаком плюс, и наоборот если не совпадает, то со знаком минус. Аналогично с источниками ЭДС.

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_5 I_5 = E_1 + E_3$$
$$R_2 I_2 + R_5 I_5 = E_2$$
$$R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_3 + E_4$$

На основании этих уравнений составляем систему с 5-ью неизвестными

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_5 I_5 = E_1 + E_3 \\ R_2 I_2 + R_5 I_5 = E_2 \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_3 + E_4 \\ I_3 - I_1 - I_4 = 0 \\ I_5 + I_1 - I_2 = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему любым удобным способом, найдем неизвестные величины

$$\begin{cases} I_1 = 0,229 \\ I_2 = 0,435 \\ I_3 = 0,645 \\ I_4 = 0,416 \\ E_4 = 100 \end{cases}$$

Для этой задачи выполним проверку с помощью баланса мощностей, при этом сумма мощностей, отданная источниками, должна равняться сумме мощностей полученных приемниками.

$$I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 + I_4^2R_4 + I_5^2R_5 = E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3 + E_4I_4$$
$$126,2 \approx 126,2\,Bm$$

Баланс мощностей сошелся, а значит токи и ЭДС найдены верно.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Восемь проводников сопротивлением 10 Ом каждый соединены в четыре одинаковые параллельные группы. Определите эквивалентное сопротивление цепи и нарисуйте ее электрическую схему.

2. Разветвление из трех параллельно включенных резисторов сопротивлениями 3, 8, и 6 Ом включено последовательно с другим разветвлением, состоящим из четырех резисторов сопротивлениями 2, 7, 6 и 3 Ом. Определите эквивалентное сопротивление цепи и нарисуйте ее электрическую схему.

3. В помещении, удаленном от генератора на расстояние 100 м включены параллельно 44 лампы накаливания с сопротивлением 440 Ом каждая. Напряжение на лампах 220 В. Проводка выполнена медным проводом с сечением 17,0 мм^2. Определить падение напряжения в подводящих проводах и напряжение на зажимах генератора.

4. Параллельно с лампой мощностью 100,0 Вт включили электроплитку мощностью 400,0 Вт. Напряжение в сети 127 В. Какое напряжение на лампе до и после включения электроплитки, если сопротивление подводящих проводов составляет 3,0 Ом? Указанные мощности тока лампы и плитки соответствуют напряжению 127 В.

5. Два элемента с ЭДС 1,6 и 1,3 В и внутренними сопротивлениями соответственно 1,0 и 0,50 Ом соединены, как показано на рис. 6.7. Определить токи во всех ветвях. Сопротивление соединительных проводов не учитывать. R = 0,60 Ом – сопротивление участка AB.

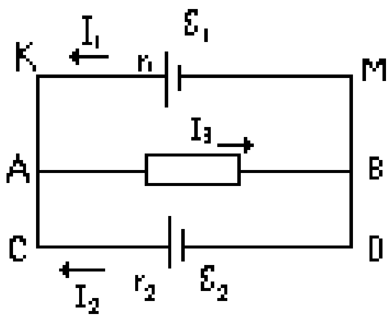
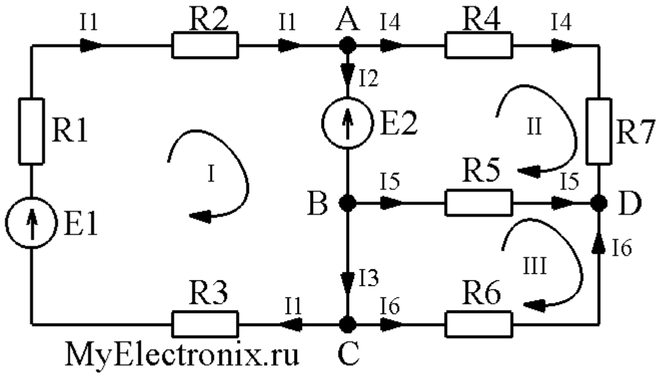


Рис. 6.7

Определите токи во всех ветвях цепи, представленной на рисунке 6.8. E1=15 В, E2=24 В, R1= 10 Ом, R2 = 51 Ом, R3=100 Ом, R4=1 кОм, R5=10 Ом, R6=18 Ом, R7=10 кОм.



ю

Рис. 6.8

Какова ЭДС источника тока на рис. 6.9, если сопротивления равны R_1, R_2 и R_3, вольтметр показывает напряжение V, его сопротивление равно R_v? Сопротивлением источника тока можно пренебречь.

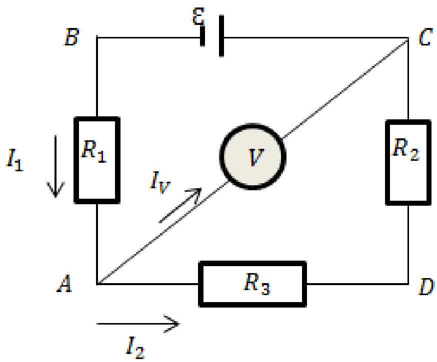


Рис. 6.9

7. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Это последний раздел физики, который мы рассмотрим в данном методическом пособии, однако задачи, связанные с тепловыми явлениями, являются отнять не самыми редкими в олимпиадных заданиях.

Рассмотрим теоретические основы этого раздела, основные термины и определения.

Температура – это количественная мера нагретости тел. Она измеряется при помощи термометра и выражается в градусах Цельсия (°С). Температура тела зависит от скорости движения молекул. Кинетическая энергия всех молекул, из которых состоит тело, и потенциальная энергия их взаимодействия составляют внутреннюю энергию тела. Внутренняя энергия зависит от температуры тела, агрегатного состояния вещества и других факторов и не зависит от механического положения тела и его механического движения. При повышении температуры внутренняя энергия тела увеличивается.

Внутренняя энергия тела изменяется в процессе теплопередачи и при совершении работы.

Изменение внутренней энергии тела без совершения работы называется **теплопередачей**. Она всегда происходит в направлении от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой. Существует три вида теплопередачи: теплопроводность, конвекция и излучение.

Количество теплоты (*Q*) – это энергия, которую получает или отдает система в процессе теплообмена, измеряется, как любая энергия, в Джоулях (Дж) Количество теплоты зависит от массы тела, рода вещества и изменения температуры тела.

Количество теплоты передаваемое между телами в процессе нагревания или охлаждения определяется по формуле:

$$Q = cm \cdot T,$$

где Q – количество теплоты $[Q]$ = 1 Дж,

c – удельная теплоемкость вещества $\left[c\right] = 1\dfrac{Дж}{кг \cdot K}$,

m – масса вещества $\left[m\right] = 1$ $кг$,

$\Delta T\left(T_2 - T_1\right)$ – изменение температуры $\left[T\right] = 1$ K.

Удельная теплоемкость вещества с измеряется количеством теплоты, которое необходимо для нагревания единицы массы данного вещества на 1К. Для нагревания 1кг стекла или 1кг воды требуется различное количество энергии. Удельная теплоемкость - известная, уже вычисленная для всех веществ величина, значение смотреть в физических таблицах.

Плавление – переход вещества из твердого состояния в жидкое. Обратный переход называется **кристаллизацией**. Энергия, которая тратится на разрушение кристаллической решетки вещества, определяется по формуле:

$$Q = \lambda m б$$

где Q – количество теплоты $[Q]$ = 1 Дж,

λ – удельная теплота плавления $[\lambda] = 1\frac{Дж}{кг}$,

m – масса вещества $[m] = 1$ *кг*.

Парообразование – это переход вещества из жидкого (твердого) состояния в газообразное. Обратный процесс называется конденсацией. Энергия, которая тратится на испарение вещества (или выделяется при его кристаллизации), определяется по формуле:

$$Q = rm,$$

где Q – количество теплоты $[Q]$ = 1 Дж,

r – удельная теплота парообразования $[r] = 1\frac{Дж}{кг}$,

m – масса вещества $[m] = 1$ *кг*.

Горение – это процесс окисления вещества, в результате которого выделяется энергия, ее количество определяется соотношением:

$$Q = qm,$$

где Q – количество теплоты $[Q]$ = 1 Дж,

q – удельная теплоемкость вещества $[q] = 1\frac{Дж}{кг}$,

m – масса вещества $[m] = 1$ *кг*.

Для замкнутой и адиабатически изолированной системы тел выполняется уравнение теплового баланса. Алгебраическая сумма количеств теплоты, отданных и полученных всеми телами, участвующим в теплообмене, равна нулю:

$$Q_1 + Q_2 + ... + Q_n = 0$$

Задача 7.1. В калориметр с водой при температуре 20 °С опустили тело массой 152 г при температуре 100 °С. Температура поднялась до 30 °С. Не вынимая тело, в сосуд налили 100 г воды при 100 °С, при этом температура поднялась до 60 °С. Определите удельную теплоемкость тела. Теплоемкостью калориметра не пренебрегать. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/кг°С

Решение:

Калориметр с водой получают количество теплоты, равное:

$$Q_1 = (C + cm)(t - t_0),$$

где C – теплоемкость калориметра (количество тепла, необходимо, что его нагреть на 1°С),

c, m – удельная теплоемкость и масса воды, находящейся в калориметре,

t и t_0 – установившаяся и начальная температура в калориметре соответственно.

Тело, опущенное в воду, отдает количество теплоты, равное:

$$Q_2 = c_1 m_1 (t - t_1)$$

где c_1, m_1, t_1 – удельная теплоемкость, масса и начальная температура тела.

Запишем уравнение теплового баланса для первого процесса:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \rightarrow -(C + cm)(t - t_0) = c_1 m_1 (t - t_1)$$

Отсюда можно выразить:

$$C + cm = \frac{c_1 m_1 (t - t_1)}{t_0 - t}$$

После доливания горячей воды, которая отдаст количество теплоты, равное:

$$Q_3 = cm_2 (t_k - t_2)$$

где m_2, t_2 – масса и начальная температура горячей воды,

t_k – конечная температура.

Содержимое калориметра получит количество теплоты, равное:

$$Q_{41} = (C + cm + c_1 m_1)(t_k - t)$$

Запишем уравнение теплового баланса для второго процесса:

$$Q_3 + Q_4 = 0 \rightarrow (C + cm + c_1 m_1)(t_k - t) = -cm_2 (t_k - t_2)$$

Подставив первое выражение во второе, получим расчетную формулу:

$$\frac{c_1 m_1 \left(t - t_1\right)}{t_0 - t} + c_1 m_1 = -\frac{c m_2 \left(t_k - t_2\right)}{t_k - t}$$

$$c_1 m_1 \left(\frac{t - t_1}{t_0 - t} + 1\right) = \frac{c m_2 \left(t_2 - t_k\right)}{t_k - t}$$

$$c_1 \left(\frac{t - t_1 + t_0 - t}{t_0 - t}\right) = \frac{c m_2 \left(t_2 - t_k\right)}{t_k - t}$$

$$c_1 = \frac{c m_2 \left(t_2 - t_k\right)\left(t_0 - t\right)}{m_1 \left(t_k - t\right)\left(t_0 - t_1\right)}$$

При расчете получим c_1 = 460 Дж/кг·°С

Задания для самостоятельного выполнения

1. В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда массой М при t = 0 °С и прочно прикрепили ко дну. Затем залили этот лёд водой такой же массой М. Вода полностью покрыла лёд и достигла уровня H=20 см. Определите, какова была температура воды, если после установления теплового равновесия уровень воды в сосуде опустился на h = 0,4 см. Плотность воды и льда равны 1000 и 920 кг/м^3 соответственно. Удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг.

2. В теплоизолированном сосуде находится смесь льда массой m = 2,1 кг и воды. После начала нагревания температура смеси оставалась постоянной в течение времени t1 = 11 мин, а затем за время t2 = 4 мин повысилась на Δt = 20 °С. Определите массу смеси, если считать, что количество теплоты, получаемое системой в единицу времени, постоянно. Удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг, а удельная теплоемкость воды с = 4,2 кДж/(кг×К). Теплоемкостью сосуда пренебречь.

3. В сосуд, содержащий 2,35 кг воды при 20 °С, опускают кусок олова при температуре 234 ^{o}С, в результате чего температура воды в сосуде повысилась на 15 °С. Найдите массу олова. Удельная теплоемкость олова 250 Дж/кг·°С.

4. Требуется расплавить 10т железа, имеющего температуру 25 °С. Температура плавления железа 1530 °С. Сколько для этого потребуется сжечь каменного угля (удельная теплота сгорания 29 Мдж\кг), если коэффициент полезного действия плавильной печи 20 %?

5. Смешали 39 кг воды при температуре 20 °С и 21 кг воды при температуре 60°С. Найти температуру образовавшейся смеси.

6. На спиртовке нагревали 400 г воды от 16 °С до 71 °С. При этом было сожжено 10 г спирта (удельная теплота сгорания 29 Мдж\кг). Найдите коэффициент полезного действия установки.

7. Электрический нагреватель имеет три одинаковые спирали. Две параллельно соединенные спирали подключены последовательно с третьей. Нагреватель опущен в сосуд с водой. Спустя τ_o = 9 мин, когда вода нагрелась от температуры t_1 = 20 °С до температуры t_2 = 50 °С, спираль в параллельном соединении перегорела. На сколько больше времени из-за этого придется ждать, пока вода закипит? Потери теплоты не учитывать, напряжение на клеммах постоянно.

8. Кусок льда с вмерзшими в него свинцовыми дробинками общей массой 200 г осторожно опускают в стакан калориметра, доверху наполненный водой. Часть воды при этом выливается и в дальнейшем теплообмене не участвует. Когда система пришла в состояние теплового равновесия, оказалось, что температура воды в калориметре 20 °С. Начальные температуры воды составляла 40 °С, льда – (−20 °С). Масса воды в калориметре была 1,2 кг. Определите объемное содержание свинца в куске льда. Теплоемкостью калориметра пренебречь. Удельная теплоемкость воды $4{,}2\times10^3$ Дж/(кг×°С), льда $2{,}1\times10^3$ Дж/(кг×°С), свинца 138 Дж/(кг×°С). Плотность льда 900 кг/м^3, свинца 11,3×103 кг/м^3. Удельная теплота плавления льда 3,35×105 Дж/кг.

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАНИЯ ПРОШЛЫХ ЛЕТ

Математика 8 класс

1. Найдите сумму чисел: $1+3+5...+99$.

2. Найдите координаты точки пересечения двух прямых $3x-2y-4=0$ и $4x+7y-15=0$.

3. Первую половину пути грузовик проехал со скоростью 50 км/ч. Вторую половину пути грузовик проехал со скоростью на 40 % меньшей. С какой средней скоростью ехал грузовик?

4. Решите уравнение: $\frac{2x-2}{3}+\frac{x-1}{5}-\frac{4x-4}{7}=\frac{31}{35}$.

5. На числовой прямой указать точку Т, симметричную точке А(-2) относительно точки В(5).

6. Вычислите: $1+2+3+...+70$.

7. Найдите координаты точки пересечения двух прямых $2x+5y+13=0$ и $7x-2y-13=0$.

8. На элеватор поступило 350 тонн пшеницы двух сортов. Первый сорт содержал 2% отходов, а второй – 3% отходов. После очистки получили 341 тонну чистой пшеницы. Сколько тонн пшеницы второго сорта поступило на элеватор?

9. В связи с высоким спросом на зонтики их стоимость 10 сентября была повышена на 20%, затем 1 октября текущая стоимость была снижена на 15% и 15 октября была повторно снижена еще на 10% от текущей. На сколько процентов изменилась конечная стоимость зонтиков от начальной, которая была до 10 сентября.

10. Вычислите: $\frac{5}{17}+1\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}+2\frac{7}{34}+\frac{1}{2}$

11. По результатам проверки контрольной работы в 10А оценку «отлично» получили 28% учащихся, «хорошо» - 42% и «удовлетворительно» - 30%, «неудовлетворительно» не получил никто. В 10Б «отлично» получили 12 учащихся, «хорошо» - 9, «удовлетворительно» - 3 и «неудовлетворительно» - 1. На сколько отличается средний балл за контрольную в 10А и 10Б классах.

Математика 9 класс

1. Сумма цифр двузначного числа равна 7. Если к каждой цифре этого числа прибавить 2, то получится число на 3 меньше удвоенного первоначального. Найдите это число.

2. Решите уравнение: $(x-1)^4+5(x^2-5x+4)^2=36(x-4)^4$

3. Решите неравенство: $\sqrt{2x^2-6|x|+4}\le 5-|x|$.

4. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}+x-2\le\dfrac{2x+7}{2}+\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{8x+21}{6} \\ \dfrac{5(x-14)}{12}-\dfrac{5}{6}<\dfrac{x+2}{8}-\dfrac{6-x}{8} \end{cases}$$

5. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;2), B(3;4), C(1;0)$. Найдите уравнение высоты, проведенной из вершины A к стороне ВС.

6. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих 12,5 % железа, процент железа в руде повысился в 1,5 раза. Сколько килограммов железа осталось в руде после удаления указанных 200 кг примесей?

7. Решите уравнение: $|x-1|+|x|=1$.

8. Найдите решение системы уравнений с минимальным значением переменной x

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=32 \\ x^2+4y=16 \end{cases}$$

9. Решите уравнение: $3+\sqrt{x-1}=x$.

10. Решите уравнение: $\dfrac{\sqrt{x^4+4x^3+4x^2}}{|x|}=2$

11. Найдите решение системы уравнений с минимальным значением переменной у $\begin{cases} 5x^2+6xy+5y^2=13 \\ x^2-2xy+y^2=9 \end{cases}$

Физика 8 класс

1. Малый поршень гидравлического пресса под действием силы 500 Н опустился на 15 см. При этом большой поршень поднялся на 5 см. Какая сила действует на большой поршень?

2. Из воды, взятой при температуре 10℃, получили 15 кг водяного пара при температуре 100 ℃. Сколько для этого необходимо сжечь каменного угля, удельная теплота сгорания которого равна 27 МДж/кг, если КПД нагревателя 20%? Удельная теплоемкость воды равна 4200 Дж/кг·℃, а ее удельная теплота парообразования – 2,3 МДж/кг.

3. Малый поршень гидравлического пресса площадью 2 см^2 под действием силы опустился на 16 см. Площадь большого поршня 8 см^2. Определите вес груза, поднятого поршнем, если на малый поршень действовала сила 200 Н.

4. На бензиновой горелке в медном чайнике массой 0,2 кг вскипятили воду массой 1 кг, взятую при температуре 20℃. В процессе кипячения 50 г воды выкипело. Какая масса (в граммах) бензина при этом была истрачена, если КПД примуса 30%. Удельная теплоемкость воды равна 4200 Дж/кг·℃, а удельная ее теплота парообразования – 2,3 МДж/кг; удельная теплоемкость меди 400 Дж/кг·℃, удельная теплота сгорания бензина 46 МДж/кг.

5. Давление в гидравлической машине 400 кПа. На меньший поршень действует сила 200 Н. Площадь большого поршня 400 см^2. Определите площадь меньшего поршня.

6. В калориметр налито 57,4 г воды при температуре 12℃. В воду пущен пар при температуре 100℃. Через некоторое время количество воды в калориметре увеличилось на 1,3г, а температура воды поднялась до 24,8℃. Для нагревания пустого калориметра на 1℃ требуется 18,27 Дж теплоты. Определите удельную теплоту парообразования воды (в МДж/кг). Удельную теплоемкость воды принять равной 4200 Дж/кг℃.

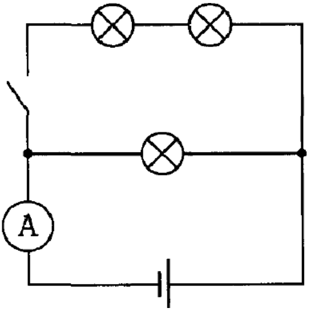
Физика 9 класс

1. Кусок проволоки сопротивлением 10 Ом разделили пополам и полученные куски соединили параллельно. Каково сопротивление получившегося участка цепи?

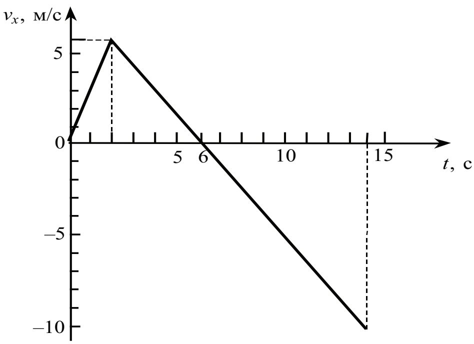
2. Свинец массой 0,1 кг при температуре 100℃ погрузили в алюминиевый калориметр массой 0,04 кг, содержащий 0,24 кг воды при температуре 15℃. После некоторого времени в калориметре установилась температура 16℃. Рассчитайте удельную теплоемкость свин-

ца. Удельную теплоемкость воды считать равной 4,2 кДж/кг℃; алюминия – 920 Дж/кг℃. Ответ привести в системе СИ.

3. Лампы и амперметр включены так, как показано на рисунке. Во сколько раз отличаются показания амперметра при разомкнутом и замкнутом ключе? Сопротивления ламп одинаковы. Напряжение поддерживается постоянным.

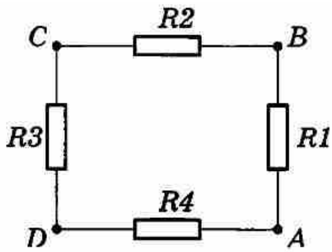


4. На рисунке представлена зависимость проекции скорости на ось *OX* от времени для движения некоторого тела. Определите среднюю путевую скорость тела за первые 14 с движения.



5. Снаряд массой 10 кг в верхней точке параболической траектории имел скорость 200 м/с. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая, массой 3 кг, получила скорость 400 м/с и полетела вперед и вверх под углом 60° к горизонту. Найдите, с какой скоростью полетит более тяжелая часть снаряда?

6. Резисторы сопротивлениями R_1 = 1 Ом, R_2 =2 Ом, R_3 =3 Ом, R_4 = 4 Ом подключены к источнику тока в точках BD. Найдите общее сопротивление цепи при данном способе подключения.



7. Две лампочки сопротивлениями 60 Ом и 120 Ом подключили параллельно к сети с напряжением 240 В. Какая мощность выделяется в каждой из лампочек?

8. При съемке с расстояния a_1 = 9,8 м изображение предмета на фотопластинке имеет высоту h_1 = 1,2 мм, а при съемке с расстояния a_2 = 3,5 м – высоту h_2. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата равно f = 85 мм. Определите неизвестную величину h_2.

9. В течение двух часов поезд двигался со скоростью 110 км/ч, затем сделал остановку на 10 мин. Оставшуюся часть пути поезд шел со скоростью 90 км/ч. Определите среднюю путевую скорость поезда на всём пройденном пути протяженностью 400 км.

10. Нагреватель отдает рабочему телу теплового двигателя за некоторое время количество теплоты, равное 150 кДж, а холодильник за это же время получает от рабочего тела количество теплоты, равное 100 кДж. Определите полезную работу теплового двигателя за это время и его КПД.

Использованная литература

1. Математика: метод. Пособие по подготовке к олимпиадам школьников: 8–9-й классы / Т.Н. Сабурова, Ю.А. Дубнинский. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2016. – 62 с.

2. Решение уравнений в целых числах: учеб. пособие / Н.И. Латанова, А.П. Власова, Н.В. Евсеева. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 75 с.

3. Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.И. Математический анализ. Учебное пособие для IX–X классов средних школ с математической специализацией. М., Просвещение, 1969 г.

4. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001.

5. Исаков А.Я. Физика. Решение задач ЕГЭ − 2015. Ч. 1: КамчатГТУ, 2014.

6. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика твердого тела. Лекции. Издательство Физического факультета МГУ, 1997.

7. Образовательный портал Сколково «ЯКласс», http://www.yaklass.ru/

8. Открытый колледж «Физикон», http://www.physics.ru/

9. Единая коллекция Цифровых образовательных ресурсов, http://school-collection.edu.ru/

10. Подготовка к ЦТ (ЕГЭ), задачи по физике и математике, ttp://fizmat.by/

11. Астрофизический портал, http://www.afportal.ru/

12. Русаков А.В., Сухов В.Г. Сборник задач по физике (физико-математическая школа № 2, г. Сергиев Посад). 1998 г.

13. Белолипецкий С.Н., Еркович О.С. и др. Задачник по физике (физико-математический лицей при Московском техническом университете им. Н. Э. Баумана). 2005 г.

14 Задачи вузов МГУ, МФТИ, НГУ, МИФИ, БГУ, БНТУ, БГУиР разных лет.

Рекомендуемая литература

1. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы / Агаханов Н.Х. Подлипскии О.К. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с

2. Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы / Агаханов Н.Х. Богданов И.И., Кожевников П.А. [и др.]. – М. : Просвещение, 2010. – 239 с.

3. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников [и др.]. – М.: Просвещение, 2008. – 192 с.

4. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Агаханов Н.Х,. Подлипскии О.К. // Под ред. Демидовой С.И., Колисниченко И.И. – М. : Просвещение, 2009. – 159 с.

5. Математика. Международные олимпиады / Агаханов Н.Х., Кожевников П.А., Терешин Д.А. – М. : Просвещение, 2010. – 127 с.

6. Балаян Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задача по математике. 3-е изд. – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 364 с.

7. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика. – М. : Бюро Квантум, 2007. – 160 с.

8. Федоров Р.М., Капель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993–2005 г. / Под ред. В.М. Тихомирова. – М. : МЦНМО, 2006 – 456 с.

9. Шклярскин Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика. Алгебра. – М. : ФИЗМ АТЛИТ, 2001 – 479 с.

10. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2012 года [сайт]. – http:olimpiads.mccme/ru/ommo/12/

11. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2013 года [сай г]. –http:olimpiads.mccme/ru/ommo /13/

12. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2014 года [сайт]. –http:olimpiads.mccme/ru/ommo /14/

13. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2012 года [сай г]. – http:olimpiads.mccme/ru/ommo /15/

14. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н. Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра, – М. : ФИЗМ АТЛИТ, 2007 – 454 с.

15. Шарыгин И.Ф., Кордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. – М. : Астрель • АСТ, 2001 – 397 с.

16. Бабинская И.П. Задачи математических олимпиад. – М. . Наука, 1973 – 110 с.

17. Сборник задач по математике для поступающих 1 (с решениями). Алгебра. (7-е изд.) Под редакцией М.И. Сканави – М. : «Высшая школа», 1994. – 526 с.

18. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре. 8–9 классы Учебное пособие для учащихся 8–9 классов с углубленным изучением математики. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 271 с.

19. Карп А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа. 10–11 классы – М. : Просвещение, 1995. – 176 с.

20. Звавич Л.И., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Алгебра. 9 класс. Задачник 3-е изд., перераб. – М. : Мнемозина, 2008. – 336 с.

21. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Часть 2. Задачник: профильный уровень В 2-х частях. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.

22. Нагорнов О.В., Баскаков А.В. и др. Сборник задач по алгебре. Ч. 1-3. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства. В помощь учащимся 10–11-х классов – М. : НИЯУ МИФИ, 2009. – 156 с.

23. Шабунин М.И., Прокофьев А.А., Олейник Т.А., Соколова Т.В. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень. Задачник. 10–11 классы – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 477 с.

24. Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу Учебное пособие. – 2-е изд., исправ. – М.: МЦНМО, 2011. – 608 с.: ил.

25. Шахмейстер А.Х. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 1. Линейные функции и уравнения М.: МЦНМО; СПб. : Петроглиф: Виктория плюс, 2014. –176 с.

26. Шахмейстер А.Х. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 2. Нелинейные функции и уравнения. Ч. 3. Графическое решение уравнений и систем уравнений с параметром СПб. : Петроглиф: Виктория плюс; М. : МЦНМО, 2016. – 392 с.

27. Шахмейстер А.Х. Дробно-рациональные неравенства Пособие для школьников, абитуриентов и преподавателей. – 3-е изд., исправ. и доп. – М. : МЦНМО; СПб. : Петроглиф: Виктория плюс, 2008. – 248 с.

28. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами на экзаменах 3-е изд., исправ. – М. : МЦНМО; СПб. : Петроглиф: Виктория плюс, 2009. – 248 с.

Учебное издание

Ческидов Василий Владимирович
Липина Александра Валерьевна
Мельниченко Илья Ашотович

Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инженерной направленности

Техническое направление «МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА» 8–9-й классы

В авторской редакции

Подписано в печать 06.12.17	Бумага офсетная	Заказ
Формат 60 × 90 1/16	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 3,9

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», 119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС, 119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (495) 638-45-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
тел. (499) 236-76-17, тел./факс (499) 236-76-35