МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

В.В. Ческидов
А.В. Липина
И.А. Мельниченко

Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инженерной направленности

Техническое направление «МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА»

10–11-й классы

МИСиС

Москва 2017

УДК 51
Ч-51

Ческидов В.В.

Ч-51 Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инженерной направленности : Техническое направление «Математика, физика» : 10–11-й классы / В.В. Ческидов, А.В. Липина, И.А. Мельниченко. – М. : Изд. Дом НИТУ «МИСиС», 2017. – 66 с.

Цель данного пособия – помочь школьникам эффективно подготовиться к олимпиадам по техническому направлению.

Пособие содержит примеры олимпиадных заданий с разбором, анализ их выполнения учащимися, а также справочные материалы, охватывающие основные представленные на олимпиаде разделы математики и физики.

Пособие предназначено для школьников 8–11 классов и для учителей физики и математики. Материалы пособия могут быть использованы для подготовки к различным олимпиадам по математике и физике, а также на уроках.

УДК 51

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из важнейших задач олимпиад для школьников является расширить кругозор, повысить уровень подготовки и развить интерес к науке. НИТУ «МИСиС» проводит олимпиаду по техническому направлению для школьников 8–11 классов «МИСиС зажигает звезды», а также принимает активное участие в подготовке и проведении других олимпиад («Объединенная межвузовская математическая олимпиада» (ОММО), «Многофункциональная инженерная олимпиада «Звезда», включающая задачи по математике, и другие).

Накопленный опыт позволяет выделить наиболее часто встречающиеся категории олимпиадных задач. В силу ограниченности объема пособие не может охватить весь круг таких заданий. В нем подробно с комментариями разбираются решения задач, относящихся к следующим семи темам: уравнения и неравенства, текстовые задачи, основы комбинаторики, движение материальной точки, основы термодинамики, оптика, законы сохранения импульса и энергии. В пособие включены задачи из разных источников, среди них и задачи, которые были на олимпиаде «МИСиС зажигает звезды».

Надеемся, что это пособие принесет пользу не только школьникам 10 и 11 классов, но и всем интересующимся математикой, физикой и техническими науками.

Дорогие школьники! Ждем вас на олимпиаде «МИСиС зажигает звезды», а также на других олимпиадах, и желаем победы!

1. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Олимпиадные задания по математике разных лет и уровней, как правило, содержат хотя бы одно задание, связанное с решением уравнений или неравенств. Методы их решения достаточно разнообразны. В рамках данного пособия рассмотрим лишь несколько типичных заданий без анализа теоретического материала.

Задание. Решить неравенство:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}\le\sqrt{2x-12}$$

Решение.

Область определения:

$$\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 9-x\ge 0 \\ 2x-12\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\le 9 \\ x\ge 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 6 \\ x\le 9 \end{cases}$$

Преобразуем неравенство:

$$\sqrt{x+1}\le\sqrt{9-x}+\sqrt{2x-12}$$

С учётом области определения видим, что обе части неравенства - положительные числа. Возведём обе части в квадрат и получим неравенство, равносильное исходному:

$$x+1\le 9-x+2\sqrt{(9-x)(2x-12)}+2x-12$$

$$2\le\sqrt{-2x^2+30x-108}\to$$

$$4\le -2x^2+30x-108\to$$

$$x^2-15x+56\le 0\to$$

$$(x-7)(x-8)\le 0$$

т.е. $x\in[7;8]$ этот числовой отрезок включён в область определения.

Задание. Решите неравенство:

$$\log_3\frac{1+2x}{1+x}<1$$

Решение.

$$\log_3\frac{1+2x}{1+x}<1\cdot\log_3\frac{1+2x}{1+x}<\log_3 3\cdot 0<\frac{1+2x}{1+x}<3\cdot\begin{cases}\dfrac{1+2x}{1+x}<3 \\ \dfrac{1+2x}{1+x}>0\end{cases}\times$$

$$\times\begin{cases}\dfrac{x+2}{1+x}>0\\ \dfrac{1+2x}{1+x}>0\end{cases}\cdot\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2\\ x>-1\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\cdot\left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-0,5;+\infty)$

Задание. Решить систему неравенств $\begin{cases}x^2-5ax+6a^2\le 0,\\ x-a-2>0.\end{cases}$

Решение.

Корнями уравнения $x^2-5ax+6a^2=0$ являются числа $2a$ и $3a$. Решением первого неравенства системы является множество $[x_1;x_2]$, где $x_1=\min\{2a;3a\}$ и $x_2=\max\{2a;3a\}$. Или $[2a;3a]$ при $a\ge 0$ и $[2a;3a]$ при $a<0$.

Решением второго неравенства является множество $(a+2;\ +\infty)$.

Решение системы представляет собой пересечение множеств решений первого и второго неравенств.

Для сравнения чисел $2a$, $3a$ и $a+2$ воспользуемся графическим способом (рис. 1.1).

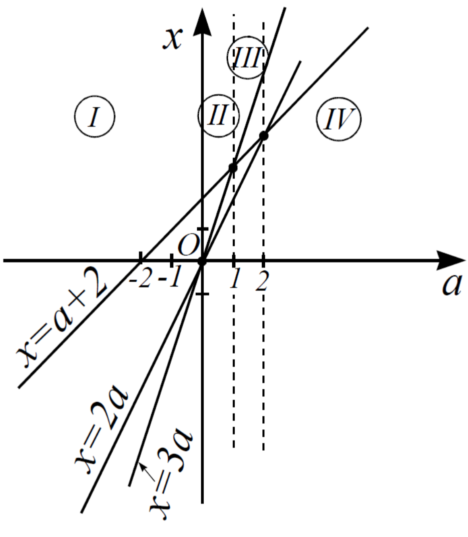


Рис. 1.1

На рисунке видно, если $a < 1$, то $a + 2$ больше $2a$ и $3a$, и $a + 2 = 3a > 2a$ при $a = 1$, и, следовательно, при $a \le 1$ система не имеет решений.

Если $1 < a < 2$, то $3a > a + 2 > 2a$ и $x \in (a + 2;\ 3a]$ – решение системы; если $a = 2$, то $3a > a + 2 = 2a$ и $x \in (2a;\ 3a]$, если $a < 2$, то $3a > 2a > a + 2$ и $x \in [2a;\ 3a]$.

Задача. Исследовать на количество корней уравнение $||2x| - 5| = x + a$ в зависимости от значений параметра a.

Решение.

Построим график $y = ||2x| - 5|$ (рис. 1.2). Функция $y = x + a$ задает семейство прямых, получающихся из прямой $y = x$ параллельным переносом на a единиц вдоль оси Oy.

Число решений исходного уравнения при соответствующем значении параметра a равно количеству точек пересечения графиков функции

$$Y = ||2x| - 5| \text{ и прямой } y = x + a.$$

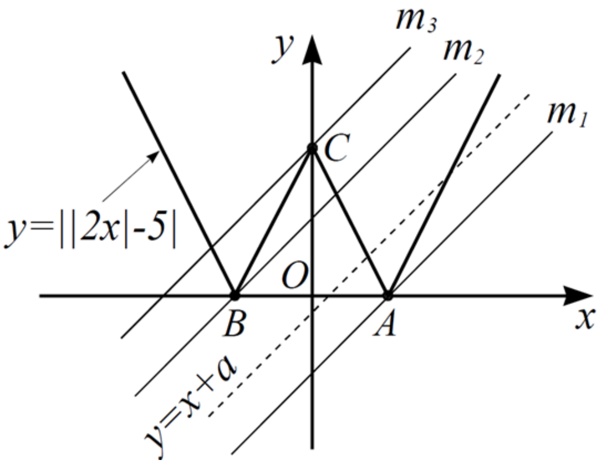


Рис. 1.2

Имеется три критических положения m_1, m_2 и m_3 прямых вида $y = x + a$.

Прямая m_1 проходит через точку $A(2{,}5;0)$, m_2 – через точку $B(-2{,}5;0)$, m_3 – через точку $C(0;5)$. Этим прямым соответствуют значения параметра $a_1 = -2{,}5$, $a_2 = 2{,}5$ и $a_3 = 5$ соответственно.

Ответ. Если $a < -2{,}5$, то решений нет; если $a = -2{,}5$, то одно решение; если $-2{,}5 < a < 2{,}5$, то два решения; если $a = 2{,}5$, то три решения; если 2,5<a <5, то четыре решения; если a=5, то три решения; если a>5, то два решения.

Задача. При любом действительном значении параметра a решить уравнение $|cos\, x| = cos(x+a)$.

Решение.

$$|cos\, x| = cos(x+a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = \cos(x+a), \\ \cos x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -\cos x = \cos(x+a), \\ \cos x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим первую систему совокупности

$$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = x + a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -x - a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{a}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases}$$

Неравенство $\cos\left(-\frac{a}{2} + 2\pi k\right) \geq 0$ справедливо при

$-\pi/2 + 2\pi n \leq -a/2 + 2\pi k \leq \pi/2 + 2\pi n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\pi + 4\pi n + 2\pi k \leq a \leq \pi + 4\pi n + 2\pi k\ , k, n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} \cos x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x - \pi = x + a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow \\ x - \pi = -x - a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = -\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi/2 - \dfrac{a}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Неравенство $\cos\left(-\frac{a}{2} + 2\pi k\right) < 0$ справедливо при

$4\pi n + 2\pi k \leq a \leq -2\pi + 4\pi n + 2\pi k\ , k, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ:

$x = -\frac{a}{2} + \pi k$ и $x = -\frac{a}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ при $4\pi n < a < \pi + 4\pi n$;

$x = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x = -\dfrac{a}{2} + \pi + 2\pi k$ при $\pi + 4\pi n < a < 2\pi + 4\pi n$;

$x = -\dfrac{a}{2} + \pi + 2\pi k$ и $x = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$ при $2\pi + 4\pi n < a < 3\pi + 4\pi n$;

$x = -\dfrac{a}{2} + \pi + 2\pi k$ и $x = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{2}\pi + 2\pi k$ при $3\pi + 4\pi n < a < 4\pi + 4\pi n$;

$-\pi/2 + 2\pi k \leq x \leq \pi/2 + 2\pi k$ при $a = 2\pi n$;

$\pi/2 + 2\pi k \leq x \leq 3\pi/2 + 2\pi k$ при $a = \pi + 2\pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$

Задача. При каких значениях параметров p и q парабола y=2x^2 + + $px + q$ касается прямых $y = 8x - 5$ и $y = 12x - 11$?

Решение.

Пусть прямая $y = 8x - 5$ касается параболы $y=2x^2 + px + q$ в точке M_1 с координатами (x_1, y_1). Тогда значение производной $(2x^2 + px + q)' = 4x + p$ при $x = x_1$ будет равно угловому коэффициенту прямой $4x_1 + p = 8$ и так как M_1 – точка касания, то $y_1 = 2x_1^2 + px_1 + q$ и $y_1 = 8x_1 - 5$.

Пусть точка M_2 с координатами (x_2, y_2) – точка касания параболы со второй прямой. Тогда получаем два уравнения:

$$4x_2 + p = 12 \text{ и } 2x^2 + px_2 + q = 12x^2 - 11$$

по аналогии с предыдущим случаем.

Объединим полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + p = 8 & (1) \\ 4x_2 + p = 12 & (2) \\ 2x_1^2 + px_1 + q = 8x_1 - 5 & (3) \\ 2x_2^2 + px_2 + q = 12x_2 - 11 & (4) \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $x_1 - x_2 = -1$ или $x_1 = x_2 - 1$. Теперь вычтем из третьего уравнения системы четвертое $2(x_1^2 - x_2^2) + p(x_1 - x_2) = 8x_1 - 12x_2 + 6$. Подставляя в полученное уравнение $x_1 - x_2 = -1$, $x_1 = x_2 - 1$ и $p = 12 - 4x_2$, придем к уравнению:

$$-2(x_1 - 1 + x_2) - (12 - 4x_2) = 8(x_2 - 1) - 12 - 12x_2 + 6$$

или $x_2 = 2$.

Откуда p=4 и q=$12x_2 - 11 - x_2^2 - px_2 = -3$.

Ответ: $p = 4$, $q = -3$.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Решите неравенство $2x - 5 \leq 3 + x$.
2. Решите неравенство $(x - 3)(x + 2) > 0$.
3. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x \leq 0 \\ 2 + x > 0. \end{cases}$
4. Найдите целочисленные решения системы неравенств $\begin{cases} -2 - 5x > 0 \\ 2x + 3 > 0. \end{cases}$
5. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x + 7 \leq 4x - 8 \\ 10 + 4x \geq 0. \end{cases}$
6. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 3(x - 1) - 2(1 + x) < 0 \\ 3x - 4 > 0. \end{cases}$$

7. Найти наименьшее целое решение неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7)<\dfrac{3x-20}{9} \\ 3x-\dfrac{2x-13}{11}>2. \end{cases}$$

8. Решите неравенство $\frac{7-9x}{3} \geq 1$.

9. Решите неравенство $\frac{2x-1}{4}+\frac{x+3}{3} \leq 0$.

10. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2>4 \\ 2x-5<0. \end{cases}$

11. Найти все целые решения системы $\begin{cases} 5x-x^2 \geq 0 \\ \frac{x}{3}-2x<-4. \end{cases}$

12. Решите неравенство $\frac{2x-3}{x+1}<0$.

13. Решите неравенство $2^x<16$.

14. Решите неравенство $3+\frac{4}{x+2}>\frac{3}{x}$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x-1}<4$.

16. Решите неравенство $\sqrt{2x-3}-3+x \geq 0$.

17. Решите неравенство $7^{x+1}- 7^x < 42$.

18. Решите неравенство $\log_{0,5}(2x+3)>0$.

19. Решите неравенство $\log_{0,5}\frac{x}{x-1}>\log_2 2$.

20. Решите неравенство $\log_{x+1}\frac{3x}{5x-8}>1$

21. Решите неравенство $\log_{x+1}12 > \log_{x+1}2$.

22. Решите неравенство $|x-3|>2x$.

23. Найдите наибольшее целое решение неравенство:

$\frac{4^x+3\cdot 2^x-4}{x^2+x+3}<0$.

24. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2+x-1 \geq -1-4x-x^2 \\ |x|<6 \end{cases}.$$

25. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} |x+5|<12 \\ \sqrt{x+3} \geq \sqrt{10-x} \end{cases}.$$

26. Найдите все значения параметра m, для которых неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ будет выполнено при всех $x > 0$.

27. Найдите все такие значения параметра a, что для любого значения параметра b уравнение $x^2 + bx + a = 0$ имеет хотя бы один корень.

28. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} axy + x - y + 1{,}5 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0. \end{cases}$$

29. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y + a = ax^2, \\ |x| + |y| = 2\,. \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений? Сколько решение в этом случае имеет система?

30. Определите, при каких значениях a, система уравнений имеет 4 решения.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0, \\ y - |x - 2| = a\,. \end{cases}$$

31. Определите значения параметра a, при которых данные неравенства равносильны:

а) $4a - ax \geq x - 2$ и $ax - a \leq x + 2$;

б) $2a\,x - 2a > x + 4$ и $2ax + 2a > x - 8$.

32. Найдите все значения параметра a , при котором неравенство:

$$\frac{x - 3a - 1}{x + 2a - 2} \leq 0,$$

выполняется для всех x из промежутка $2 \leq x \leq 3$.

33. При каких значениях параметра a имеет ровно три решения уравнение:

$(|x - 4a + 1| + |x - 8a + 1| - 4)(2ax^2 + 24ax - x + 22a - 11) = 0$.

34. Используя графический метод, решите неравенство:

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{2ax - x^2} > a$$

2. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Анализ олимпиадных заданий различных лет показывает, что рассматриваемый тип задач является наиболее распространенным. Текстовая задача – это описание некоторой проблемы или проблемной ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику того или иного компонента этой ситуации.

Решение любой текстовой задачи сводится к тому, что мы составляем некоторые математические зависимости между величинами (уравнения, неравенства или их системы), которые необходимо определить в результате решения. Затем анализируем и решаем полученные зависимости и полученные результаты оцениваем с точки зрения реального смысла искомых величин.

Несмотря на огромное разнообразие текстовых задач существует ряд наиболее распространенных их видов (часть из них рассмотрено в подобном пособие для 8 и 9-ых классов).

Задачи на движение

В качестве примера рассмотрим одну задачу в данном разделе, которая представляет наибольшую трудность при решении.

Задача. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 22 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого?

Решение.

На первый взгляд, задачи на круговое движение могут показаться сложными и какими-то запутанными в сравнении с обычными задачами на прямолинейное движение. Но это только на первый взгляд. Данная задача легко превращается в задачу на прямолинейное движение. Для этого выполним следующие преобразования условия:

- мысленно развернём круговую трассу в прямую. На ней стоят два мотоциклиста. Один из них отстаёт от другого на 11 км, так как сказано в условии, что длина трассы 22 километра.
- скорость отстающего на 20 километров в час больше (он догоняет того, кто впереди).

Итак, искомую величину (время, через которое они поравняются) примем за x часов. Скорость первого (находящегося впереди) обозначим y км/ч, тогда скорость второго (догоняющего) будет $(y + 20)$ км/ч.

Отсюда получаем уравнение:

$$(y+20)x = yx + 11$$
$$yx + 20x = yx + 11$$
$$x = \frac{11}{20} = \frac{33}{60}$$

Таким образом получаем, что первый раз мотоциклисты встретятся через 33 минуты.

Задания для самостоятельного выполнения

1. На одном берегу реки находится деревня A и ниже по течению деревня B, а на другом берегу - деревня C, так что все три деревни расположены в вершинах равнобедренного треугольника с углом φ при основании AB. Лодочник из деревни A хочет посетить деревни B и C и вернуться назад. По какому маршруту он должен отправиться, чтобы сэкономить время? Исследуйте вопрос в зависимости от соотношения между скоростью лодки в стоячей воде v и скоростью течения реки U.

2. Мотоциклист проехал расстояние в 180 км от А до В с постоянной скоростью. На следующий день он проехал это же расстояние в обратную сторону из В в А со скоростью на 10 км/ч меньше прежней. Возвращаясь, он сделал остановку на 24 минуты и в итоге на дорогу из В в А ушло времени на 1 час больше, чем в прошлый раз на путь из А в В. Найдите скорость мотоциклиста на пути из А и В. Ответ дайте в км/ч.

3. В финальном заезде гонки участвовали два гонщика. Заезд проводился на кольцевой трассе, имеющей протяженность 6 км. Гонщикам было необходимо проехать 68 кругов. В результате первый гонщик пришел на финиш раньше второго на 15 минут. Найдите среднюю скорость второго гонщика, если известно, что он отстал от первого ровно на круг через 60 минут после начала гонки, а стартовали они одновременно. Ответ выразите в км/ч.

4. От станции А к станции В с постоянной скоростью отправился первый поезд. Расстояние между станциями составляет 153 км. Спустя 8 часов после отправления первого поезда, по тому же маршруту выехал второй поезд. Его скорость на 8 км/ч больше, чем у первого. С какой скоростью двигался первый поезд, если на конечную станцию оба поезда прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

5. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

6. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

2.2. Поиск минимума (максимума) величины в заданных ограничениях

В данном пункте рассмотрим несколько примеров решения задач, связанных с поиском максимального или минимального значения некоторой величины. Общий алгоритм решения подобных задач сводится к выведению некоторой целевой функции, которая отражает изменение анализируемой величины в зависимости от рассматриваемых параметров. Затем на эту целевую функцию накладываются ограничения (например, пределы изменения параметров). В дальнейшем находим минимум или максимум искомой функции на рассматриваемом интервале с учетом введенных ограничений.

Задача. Имеются три раствора. Первый содержит 80% кислоты и 20% воды, второй - 60% соли и 40% воды, третий - по 20% соли и кислоты и 60% воды. Из них необходимо приготовить новый раствор, содержащий 30% воды. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание соли может быть в этом новом растворе?

I способ решения

Пусть:

1 - масса нового раствора,

x-масса I раствора,

y-масса II раствора,

z-масса III раствора, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Тогда с учетом введенных обозначений:

$$x + y + z = 1$$

В новый раствор входит:

из I раствора 0,2x воды и 0,8x кислоты,

из II раствора 0,4y воды и 0,6y соли,

из III раствора 0,2z кислоты, 0,6z воды и 0,2z соли.

Масса воды в новом растворе: 1·0,3=0,3

Тогда имеем:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0{,}2x + 0{,}4y + 0{,}6z = 0{,}3 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \end{cases}$$

Пусть t-содержание соли в новом растворе, тогда:

$$t = 0{,}6y + 0{,}2z$$

Исключим из системы переменную x для этого приведем систему уравнений к виду:

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = -2 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \end{cases}$$

Следовательно:

$$2y + 4z = 1 \to y = \frac{1 - 4z}{2}$$

Так как $y \geq 0$, то:

$$1 - 4z \geq 0 \to z \leq \frac{1}{4}$$

Тогда:

$$t = \frac{0{,}6(1 - 4z)}{2} + 0{,}2z \to t = 0{,}3(1 - 4z) + 0{,}2z = 0{,}3 - z,$$

где $0 \leq z \leq \frac{1}{4}$

t=0,3-z – убывающая функция, значит, наименьшее значение t принимает при z=$\frac{1}{4}$, а наибольшее значение - при t=0.

t(z=0)=0,3 , p=30%

t(z=$\frac{1}{4}$)=0,3-0,25=0,05; p=5%

Следовательно, 5%≤p≤30%.

II способ решения

Так как в новом растворе 30% воды, а во II-м и в III-м соответственно 40% и 60%, то требуемый раствор невозможно получить только из II и III растворов, значит, масса I-го раствора – ненулевая.

Обозначим массу I раствора через 1, массу II раствора - x, массу III раствора – y, $x \geq 0$,$y \geq 0$.

Тогда масса воды в новом растворе составляет:

$0{,}3(1 + x + y) = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}4x + 0{,}6y$

$3(1 + x + y) = 2 + 4x + 6y$

$x + 3y = 1$

$x = 1-3y$

Так как $x \geq 0$, то:

$$1-3y \geq 0 \rightarrow y \leq \frac{1}{3}$$

Пусть P – процентное содержание соли в новом растворе, тогда:

$$P = \frac{0,6x + 0,2y}{1 + x + y} \cdot 100\%.$$

С учетом ранее полученных соотношений:

$$P = \frac{0,6\left(1-3y\right) + 0,2y}{1 + \left(1-3y\right) + y} \cdot 100\% = \frac{0,6 - 1,6y}{2 - 2y} \cdot 100\%.$$

Следовательно:

$$P = \frac{30 - 80y}{1 - y},$$

где $0 \leq y \leq \frac{1}{3}$.

Найдем производную от функции P.

$$P'\left(y\right) = \left(\frac{30 - 80y}{1 - y}\right)' = \frac{-80\left(1-y\right) - \left(30 - 80y\right) \cdot \left(-1\right)}{\left(1-y\right)^2} = \frac{-50}{\left(1-y\right)^2}$$

Так как $P'(y) < 0$ на интервале $(0; \frac{1}{3})$, то функция $P(y)$ убывает на отрезке $[0; \frac{1}{3}]$. Следовательно, наименьшее значение $P(y)$ достигает в точке $P = \frac{1}{3}$,а наибольшее – в точке $P = 0$.

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 5\%;\ P\left(0\right) = 30\%$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Определите наименьшую суммарную длину всех ребер прямоугольного параллелепипеда, полная поверхность которого равна 600 см^2, если основание его является квадратом.

2. Дана прямоугольная система координат xOy. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка М (0;1), а катеты лежат на прямых x=-2 и y=0?

3. Автомобиль находится в степи в точке M, отстоящей от ближайшей точки A автотрассы на 60 км. Водитель должен попасть в точку B автотрассы, отстоящую от точки M на 110 км. Водитель подсчитал, что если он сначала доедет до точки C, которая находится на автотрассе между точками A и B, а затем по автотрассе до точки B, то на весь путь он потратит наименьшее время. Найдите расстояние от A до C, считая, что автомобиль движется по степи прямолинейно со скоростью 30км/ч, по автотрассе со скоростью 50км/ч, а автотрасса – прямая линия.

4. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 10% золота, 40% серебра и 50% меди, второй – 20% серебра и 80% меди, третий – 20% золота, 30% серебра и 50%меди. Из них получили новый сплав, содержащий 5% золота. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание серебра может быть в новом сплаве?

5. Имеются три раствора. Первый содержит 80% спирта и 20% воды, второй – поровну глицерина и воды, третий – по 10% спирта и глицерина и 80% воды. Из них необходимо приготовить новый раствор, содержащий 40% воды. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание глицерина может быть в этом новом растворе?

3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин. Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для правильного понимания статистических закономерностей, проявляющихся в природе и технике.

В задачах комбинаторики обычно решается вопрос, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданного конечного набора объектов. В простейших случаях мы можем выписать все нужные нам комбинации и непосредственно подсчитать их. Однако при бессистемном выписывании легко упустить какую-то комбинацию или, наоборот, посчитать некоторую комбинацию дважды. Поэтому при переборе вариантов желательно придерживаться двух правил.

1. Обозначаем наши комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр.
2. Выписываем комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию чисел (при обозначении цифрами).

Однако такие способы решения задач во многих случаях неприемлемы, так как не представляется возможным выписать и подсчитать все возможные комбинации. Поэтому был сформирован раздел математики, который позволяет достаточно простыми способами определять количество комбинаций при различных условиях и ограничениях. Рассмотрим основные операции, которые используются в комбинаторике.

Правило суммы. Пусть объект a можно выбрать m способами, а объект b можно выбрать n способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор либо a либо b можно сделать $m+n$ способами.

Правило произведения. Пусть объект a можно выбрать m способами, после чего объект b можно выбрать n способами. Тогда упорядоченную пару (a,b) можно выбрать mn способами; иными словами, существует mn различных упорядоченных пар (a, b).

Размещения. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k различных элементов данного множества, называется размещением из n элементов по k элементов (или просто размещением из n по k). Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k. Это число упорядоченных наборов из k элементов (или число цепочек длины k), выбранных из n-элементного множества.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольная цепочка длины n, составленная из всех элементов данного множества, называется перестановкой этого множества (или перестановкой n элементов). Иными словами, перестановка n элементов – это размещение из n по n. Число перестановок n-элементного множества обозначается P_n:

$$P_n = n!$$

Сочетания. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный неупорядоченный набор, состоящий из k различных элементов данного множества, называется сочетанием из n элементов по k элементов (или просто сочетанием из n по k).

Иными словами, сочетание из n элементов по k элементов – это просто k -элементное подмножество n -элементного множества. Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k. Это число неупорядоченных наборов из k элементов, выбранных из n-элементного множества (то есть число k-элементных подмножеств n -элементного множества).

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Рассмотрим несколько олимпиадных задач из данного раздела математики.

Задача. 19 депутатов Городского Собрания выбирают Председателя из 5 кандидатов. Каждый голосует ровно за одного из них. После голосования составляется протокол заседания, в котором указывается лишь количество голосов за каждого кандидата (без указания, кто за кого проголосовал). Сколько различных протоколов может получиться?

Решение.

Пусть за первого кандидата проголосовало x_1 депутатов, за второго – x_2 депутатов, . . . , за пятого – x_5 депутатов. Тогда $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=19$, поскольку каждый депутат голосовал лишь за одного кандидата. Теперь ясно, что искомое количество протоколов равно количеству решений уравнения в целых неотрицательных числах. А это количество, в свою очередь, есть число способов разложить 19 одинаковых шаров по пяти различным ящикам, то есть число последовательностей из 19 нулей (шаров) и 4 единиц (перегородок). Таких последовательностей имеется $C_{23}^4 = 8855$.

Задача. Найти число всех функций $f: \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$.

Решение.

Каждую такую функцию можно описать следующим образом. Представим себе m клеток с номерами 1, 2, . . . , m. В клетку с номером i впишем число $f(i)$ – образ числа i. Таким образом, любая наша функция f однозначно задаётся полоской из m клеток, заполненных числами от 1 до n. Очевидно, что число таких полосок (а значит, и искомое число функций) равно n^m. Нетрудно видеть, что данная задача есть по сути задача о разложении m различных шаров в n различных ящиков (без ограничений на число шаров в ящике). Число наших функций –это число размещений с повторениями $\bar{A}_n^m$.

Задача. Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?

Решение.

Описанные в условии числа будем называть хорошими. Трёхзначных хороших чисел, очевидно, девять: 111, 222, . . . , 999.

Ищем количество четырёхзначных хороших чисел. Ровно двух нулей в записи хорошего числа быть не может. Остаются следующие варианты: три нуля, один нуль, нет нулей.

Хороших четырёхзначных чисел с тремя нулями девять: 1000, 2000, . . . , 9000. Предположим, что среди цифр хорошего четырёхзначного числа ровно один нуль. Остальные три (совпадающие) цифры можно выбрать 9 способами. При этом нуль может стоять на втором, третьем или четвёртом месте. Всего получается $9 \cdot 3 = 27$ хороших четырёхзначных чисел с одним нулём.

Предположим, что среди цифр хорошего четырёхзначного числа нуля нет. Тройку совпадающих цифр можно выбрать 9 способами; три позиции для этой тройки можно выбрать $C_4^3 = 4$ способами; четвёртую цифру можно выбрать 8 способами. Всего хороших четырёхзначных чисел без нуля получается:

$$9 \cdot 4 \cdot 8 = 288.$$

Искомое количество хороших чисел равно:

$$9 + 9 + 27 + 288 = 333.$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Сколько существует 23-значных чисел, сумма цифр которых равна четырём?

2. У Васи есть семь книг по математике, а у Вани – девять. Все 16 книг разные. Сколькими способами они смогут обменяться тремя книгами (то есть дать три книги в обмен на три книги)?

3. Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 51 различных натуральных делителей. Какое наибольшее количество различных натуральных делителей может иметь куб этого числа?

4. На числовой прямой закрашивают красным и синим цветом точки с целыми координатами по следующим правилам: а) точки, разность координат которых равна 7, должны быть покрашены одним цветом; б) точки с координатами 20 и 14 должны быть покрашены красным, а точки с координатами 71 и 143 – синим. Сколькими способами можно раскрасить все целые числа, соблюдая эти правила?

5. Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 50 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зелёные, фиолетовые и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? Саквояжи одного цвета считаются идентичными.

6. Из трёх математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдёт семь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

7. Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трёх нападающих, если в его распоряжении есть два вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?

8. Имеется желоб, по которому в обе стороны могут кататься одинаковые шарики с фиксированной скоростью. Если два шарика соударяются, каждый из них меняет направление своего движения на противоположное. С одного конца желоба двигаются пять шариков на равных расстояниях друг от друга, с другого конца – семь шариков (тоже на равных расстояниях друг от друга). Сколько всего будет соударений?

4. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

4.1. Кинематика

В последующих главах данного пособия рассмотрим основные разделы физики с решением некоторых типовых задач.

Введем некоторые основные термины и определения по данному разделу.

Кинематика – раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа и т.д.) движения идеализированных тел (материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальная жидкость), без рассмотрения причин движения (массы, сил и прочее). Исходные понятия кинематики – пространство и время. Например, если тело движется по окружности, то кинематика предсказывает необходимость существования центростремительного ускорения без уточнения того, какую природу имеет сила, его порождающая.

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется **материальной точкой**. Однако нужно помнить, что всякое тело имеет определенные размеры, и различные части тела находятся в разных местах пространства. Даже движение огромных по размерам и массе телами можно пренебрегать, так можно поступать, например, при изучении движения планет вокруг Солнца.

Механическим движением тела называют изменение его положения в пространстве относительно других тел с течением времени. Механическое движение относительно. Движение одного и того же тела относительно разных тел оказывается различным. Для описания движения тела нужно указать, по отношению к какому телу рассматривается движение. Это тело называют телом отсчета.

Перемещаясь с течением времени из одной точки в другую, тело (материальная точка) описывает некоторую линию, которую называют **траекторией движения тела**.

Криволинейное движение можно представить, как движение по набору дуг окружностей (рис. 4.1).

Положение материальной точки в пространстве в любой момент времени (закон движения) можно определять либо с помощью зависимости координат от времени $x = x\ (t)$, $y = y\ (t)$, $z = z\ (t)$ – координатный способ; либо при помощи зависимости от времени радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$, проведенного из начала координат до данной точки – векторный способ.

Перемещением тела $\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ называют направленный отрезок прямой, соединяющий начальное положение тела с его последующим положением. Перемещение есть векторная величина.

Пройденный путь l равен длине дуги траектории, пройденной телом за некоторое время t. Путь – скалярная величина.

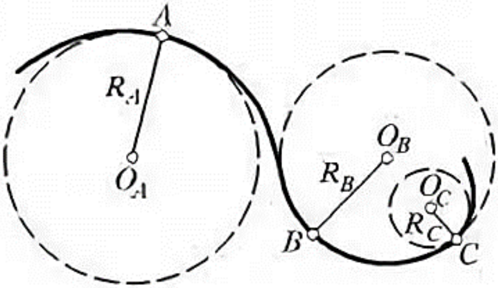


Рис. 4.1. Представление криволинейной траектории в виде набора окружностей

Рассмотрим основные типы задач по данному разделу. Первый тип задач связан с определение координаты, скорости и других величин при различных типах движения в заданный момент времени; второй – с определением средней скорости на всем участке движения.

4.2. Динамика

Динамика – раздел механики, в котором изучаются причины возникновения механического движения. Динамика оперирует такими понятиями, как масса, сила, импульс, момент импульса, энергия.

Исторически сложились две основные задачи динамики:

- прямая задача динамики: по заданному характеру движения определить равнодействующую сил, действующих на тело.
- обратная задача динамики: по заданным силам определить характер движения тела.

В основу динамики взяты три закона Ньютона.

Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчета, относительно которых тело движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела, или действия других тел компенсируются; эти системы отсчета называются инерциальными.

Если система отсчета является инерциальной, то любая другая система отсчета, движущаяся относительно нее равномерно и прямолинейно, также инерциальна. Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, являются неинерциальными.

Принцип относительности Галилея. Во всех инерциальных системах отсчета при одинаковых начальных условиях все механические явления протекают одинаково.

Инерция – это явление сохранения скорости тела.

Инертность – это свойство тела, заключающееся в его способности сохранять скорость. Более инертными являются тела, которые медленнее изменяют свою скорость. Мерой инертности является масса.

Масса тела – физическая величина, количественно характеризующая инертность тела.

Второй закон Ньютона. Ускорение тела прямо пропорционально действующей силе и обратно пропорционально его массе:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета.

Сила – физическая величина, характеризующая действие одного тела на другое, является векторной величиной. Если на тело действует несколько сил, то векторная сумма всех сил равна произведению массы на ускорение.

Третий закон Ньютона. Два тела взаимодействуют друг с другом силами, равными по величине и противоположными по направлению:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Также в рамках раздела «Динамика» рассмотрим закон Гука и Всемирного тяготения.

Закон Гука. Сила упругости, возникающая при деформации тела, пропорциональна удлинению тела и направлена противоположно направлению перемещения частиц тела относительно других частиц при деформации:

$$\left(F_{\text{упр}}\right)_x = -kx$$

Закон всемирного тяготения. Тела притягиваются друг к другу с силой, модуль которой пропорционален произведению их масс и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

Одно из проявлений силы всемирного тяготения – сила притяжения тела к Земле, называемая также силой тяжести.

$$\vec{F} = m\vec{q}$$

Рассмотри несколько примеров решения задач по данному разделу.

Задача. Эскалатор метро движется со скоростью v. Пассажир заходит на эскалатор и начинает идти по его ступеням следующим образом: делает шаг на одну ступеньку вперёд и два шага по ступенькам назад. При этом он добирается до другого конца эскалатора за время t. Через какое время пассажир добрался бы до конца эскалатора, если бы шёл другим способом: делал два шага вперёд и один шаг назад? Скорость пассажира относительно эскалатора при движении вперёд и назад одинакова и равна u. Считайте, что размеры ступеньки много меньше длины эскалатора**.**

Решение.

Пусть один шаг занимает время τ. Тогда при варианте движения «один шаг вперёд и два шага назад» за время 3τ пассажир смещается относительно земли на:

$$S_1 = 3\tau v - u\tau.$$

Средняя скорость движения пассажира:

$$v_{\text{ср}1} = S_1/3\tau = L/t,$$

где L − длина эскалатора.

Отсюда:

$$L = (3v - u)t/3.$$

Из этой формулы видно, что при $u > 3v$; пассажир не сможет достичь противоположного конца эскалатора. При варианте движения «два шага вперёд и один шаг назад» за время 3τ пассажир смещается относительно земли на:

$$S_2 = 3\tau v + u\tau.$$

Аналогично предыдущему случаю,

$$v_{\text{ср}2} = S_2/3\tau = L/t_1,$$

где t_1 − искомое время.

С учётом выражения для L получаем:

$$t_1 = (3v - u)t\ /\ (3v + u)\ .$$

Задача. Космонавты, высадившиеся на поверхность Марса, измерили период вращения конического маятника (небольшое тело, прикрепленное к нити и движущееся по окружности в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью), и он оказался равным $T = 3$ с. Длина нити $l = 1$ м. Угол, составляемый нитью с вертикалью, $\alpha = 30°$. Найдите по эти данным ускорение свободного падения на Марсе.

Решение.

На тело действуют две силы – сила тяжести $mg_м$, где $g_м$ – искомое ускорение свободного падения на Марсе, и сила натяжения нити T.

Вертикальная составляющая силы натяжения компенсирует силу тяжести:

$$T\cos\alpha = mg_м,$$

а горизонтальная составляющая равная

$$T_x = T\sin\alpha$$

создает центростремительное ускорение, вызывающее движение тела по окружности радиусом $R = l\sin\alpha$:

$$T\sin\alpha = \omega^2 R = \omega^2 l\sin\alpha = (2\pi/T)^2 l\sin\alpha.$$

Решая совместно полученные уравнения, найдем:

$$g_м = (F/m)\cos\alpha \approx 3{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Задача. Неподвижный клин с углом α при основании имеет гладкую нижнюю и шероховатую верхнюю части своей наклонной плоскости. На верхней части клина удерживают тонкий однородный жесткий стержень массой m, расположенный в плоскости рис. 4.2. Коэффициент трения между стержнем и верхней частью клина равен μ. После того как стержень отпускают, он начинает поступательно скользить по клину. Найдите максимальное значение силы натяжения стержня в процессе его движения. Влиянием воздуха пренебречь.

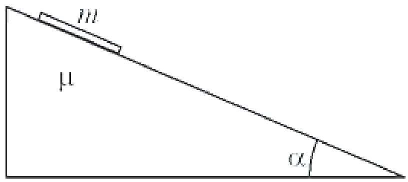


Рис. 4.2

Решение.

При решении задачи будем считать, что клин неподвижен относительно системы отсчета, ось X которой параллельна стержню и направлена вниз по клину. В тот момент, когда на гладкой поверхности клина оказывается часть стержня массой βm, где $0 \le \beta \le 1$, на нее вдоль оси X действует составляющая силы тяжести $\beta mg\sin\alpha$. Сила натяжения со стороны верхней части стержня, направленная противоположно оси X, и равная $T(\beta)$. Запишем уравнение движения нижней части стержня вдоль оси X:

$$\beta ma = \beta mg\sin\alpha - T(\beta),$$

где a − ускорение любой точки стержня вдоль оси X, так как стержень твердый и движется поступательно.

В рассматриваемый момент на верхнюю часть стержня вдоль оси X наряду с составляющей силы тяжести $(1 - \beta)mg\sin\alpha$ со стороны клина действует направленная противоположно оси X сила сухого трения скольжения:

$$\mu(1 - \beta)mg\cos\alpha,$$

а со стороны нижней части стержня действует направленная вдоль оси X сила натяжения $T(\beta)$. Уравнение движения этой части стержня в проекции на ось X имеет вид:

$$(1 - \beta)ma = (1 - \beta)mg\sin\alpha + T(\beta) - \mu(1 - \beta)mg\cos\alpha.$$

Решая совместно составленные уравнения, получаем:

$$T = \beta(1 - \beta)\mu mg\cos\alpha.$$

Видно, что сила натяжения стержня в сечении, которое находится на границе между гладкой и шероховатой частями клина, зависит от значения коэффициента β. Она будет максимальной при $\beta = 0,5$, т.е. когда одна половина стержня окажется на гладкой нижней части клина, а другая половина – на его шероховатой верхней части. В таком случае

$$T_{max} = 0,25\mu mg\cos\alpha.$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. На бесконечной плоской поверхности, наклоненной под углом к горизонту, покоится кубик, масса которого равна М, а коэффициент трения о поверхность составляет k. Скользя по плоскости, сверху на него налетает другой кубик, движущийся без трения (рис. 4.3). При каких значениях массы второго кубика первый будет спускаться по наклонной плоскости неограниченно далеко? Удар кубиков считать упругим.

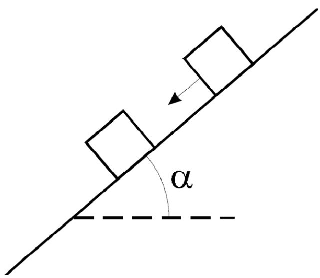


Рис. 4.3

2. На горизонтальной поверхности лежат один на другом три одинаковых кирпича (рис. 4.4). Среднему кирпичу сообщили толчком

скорость $v = 1$ м/с. Найдите смещение кирпичей по отношению друг к другу, когда прекратится их относительное движение. Коэффициент трения между кирпичами $k = 0,4$; трение между нижним кирпичом и поверхностью отсутствует.

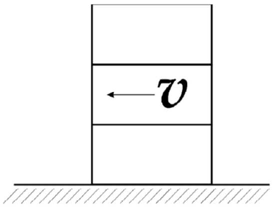


Рис. 4.4

3. Шарик, брошенный без начальной скорости с высоты h на горизонтальную поверхность, подпрыгивает на высоту h/2. На каком расстоянии от точки броска шарик перестанет прыгать и начнет двигаться по поверхности, если его бросить с поверхности со скоростью 1 м/с под углом 45° к горизонту?

4. Маленькому шарику сообщают скорость v, направленную вдоль наклонной плоскости под углом 45° к горизонту. На какую максимальную высоту поднимется шарик? Высота наклонной плоскости H. Трение отсутствует.

5. Межзвездная экспедиция обнаружила планету, похожую на Землю, имеющую ту же массу M и радиус R. Оказалось, однако, что половина массы сосредоточена в ядре радиуса R/2, центр которого смещен на R/4 относительно центра планеты. В каких пределах изменяется ускорение силы тяжести на поверхности планеты?

6. В автомобиле спидометр и счётчик пройденного пути регистрируют скорость автомобиля и пройденный им путь относительно поверхности, по которой движется автомобиль. Автомобиль последовательно проехал по двум конвейерам (движущимся дорожкам) длиной $L = 500$ м каждый. Полотна конвейеров движутся в одну сторону с постоянными скоростями $v_1 = 20$ км/ч и $v_2 = 30$ км/ч. По первому конвейеру автомобиль ехал с некоторой постоянной скоростью, а по второму конвейеру – с другой постоянной скоростью. Что показывал спидометр во время движения по каждому из конвейеров, если с момента въезда на первый конвейер до съезда со второго прошло время $t = 72$с, а счётчик пути показал, что при этом был пройден путь L. Расстоянием между конвейерами и временем переезда с первого конвейера на второй пренебречь

5. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Первое начало термодинамики – закон сохранения и превращения энергии, которым сопровождаются термодинамические процессы. Оно утверждает: «Изменение внутренней энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно сумме механических эквивалентов всех внешних воздействий». Математически первое начало термодинамики можно записать так

$$dU = dQ - dA + dM,$$

где dU - изменение внутренней энергии системы;
dQ - элементарное количество тепла, подводимого к системе;
dA - элементарная работа, совершаемая системой;
dM - другие виды элементарных энергий.

Если $dM = 0$, то

$$dU = dQ - dA \text{ или } dQ = dU + dA.$$

Из первого начала термодинамики вытекает невозможность построения вечного двигателя первого рода, т.е. такой машины, которая производила бы работу без потребления эквивалентного количества энергии.

Изопроцессы в идеальных газах

Изотермический процесс – это процесс, протекающий при постоянной температуре (T = const). Тогда

$$dQ = dU + dA = dA.$$

Из уравнения состояния идеального газа для моля или киломоля идеального газа $pV = RT$, $p = RT/V$, следовательно:

$$A = \int_{V2}^{V1} \frac{RT}{V} \cdot dV = RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Из полученного результата можно сделать вывод: при изотермическом процессе работа, совершаемая системой, зависит только от соотношения начального и конечного объемов.

Изобарический процесс - это процесс, протекающий при постоянном давлении (p = const).

В этом случае:

$$dQ = dU + dA.$$

Определим долю подводимой к системе энергии, которая идет на совершение работы, и долю этой энергии, которая идет на изменение внутренней энергии системы. Известно, что;

$$dA = pdV,$$

но для моля или киломоля идеального газа $pV = RT$, $dp \cdot T$, следовательно, $dA = R \cdot dT$, $dT = \frac{dQ}{C_{p,}}$, тогда:

$$dA = \frac{R}{C_p} \cdot dQ = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) dQ = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \cdot dQ.$$

Изохорический процесс – это процесс, протекающий при постоянном объеме ($V = \text{const}$).

Так как, $dA = p \cdot dV = 0$. Таким образом, при изохорическом процессе, все подводимое к системе тепло идет на изменение ее внутренней энергии. При этом

$$dQ = C_v dT,$$

следовательно:

$$dU = C_v dT, \Delta \mathrm{U} = C_v \Delta T.$$

Изменение внутренней энергии системы пропорционально изменению ее температуры.

Второе начало термодинамики. Оно накладывает ограничения на возможности циклического получения механической работы за счёт полученной теплоты (формулировки Клаузиуса и Томсона (Кельвина)). Во-вторых, с помощью понятия энтропии оно позволяет судить о направлении протекания процессов в системе (формулировка Больцмана).

Формулировка Клаузиуса: Теплота не может самопроизвольно перейти от более холодного тела к более нагретому без каких-либо других изменений в системе.

*Формулировка Томсона (Кельвина): «*Невозможно преобразовать в работу всю теплоту, взятую от тела с однородной температурой, не производя никаких других изменений в состоянии системы (невозможно создать вечный двигатель второго рода)».

Энтропия (в формулировке А. Зоммерфельда): «Каждая термодинамическая система обладает функцией состояния, называемой энтропией. Энтропия вычисляется следующим образом. Система переводится из произвольно выбранного начального состояния в соответствующее конечное состояние через последовательность состояний равновесия; вычисляются все проводимые при этом к системе порции тепла dQ, делятся каждая на соответствующую ей абсолютную температуру T, и все полученные таким образом значения суммируются. При реальных (неидеальных) процессах энтропия изолированной системы возрастает».

Задача. Средняя скорость молекул некоторого газа при температуре t = 27°C составляет υ = 515м/с. Какое количество молекул этого газа содержится в m = 10г этого газа?

Решение.

Если бы молярная масса газа μ была нам известна, то число молекул, содержащихся в массе m, можно было бы найти из соотношения:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A$$

Найдем из данных условия молярную массу газа. Из определения температуры:

$$\frac{m_0 \cdot v^2}{2} = \frac{3}{2} kT \ ,$$

где m0 – масса молекул газа;

T – абсолютная температура.

Умножая последнее равенство на число Авогадро и учитывая, что:

$$m_0 N_A = \mu,$$

получим:

$$\mu = \frac{3kN_A T}{\vartheta^2} = \frac{3kN_A\left(t + 273\ °\mathrm{C}\right)}{\vartheta^2} = \frac{0{,}028\ \text{кг}}{\text{моль}} = 28\frac{\text{г}}{\text{моль}}.$$

Таким образом, рассматриваемый газ – молекулярный азот. Используя ранее полученные формулы, находим, что газ содержит следующее число молекул:

$$N = \frac{m\vartheta^2 N_A}{3kN_A T} = \frac{m\vartheta^2}{3k\left(t + 273\ °\mathrm{C}\right)} = 2{,}1 \cdot 10^{23}$$

Задача. С одноатомным идеальным газом происходит процесс, в котором его давление зависит от объема по закону $P = \alpha V$. Найти теплоемкость газа в этом процессе.

Решение.

Если газу сообщили некоторое количество теплоты Q, то приращение температуры газа ΔT по первому закону термодинамики составит:

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + A,$$

где ν – число молей газа.

Чтобы найти приращение температуры газа ΔT вычислим совершенную им работу. Для этого построим график зависимости давления газа от его объема в исследуемом процессе и найдем площадь под участком графика, отвечающего нагреву газа на ΔT. Очевидно, график зависимости давления от объема для рассматриваемого процесса представляет собой участок прямой, проходящей через начало координат. Этот график построен на рисунке 5.1, участок прямой, отвечающий исследуемому нагреву, и площадь под ним выделены. Пусть объем газа до нагревания был равен V_0, после нагревания – V_1. Тогда давления газа до p_0 и после p_1 нагревания можно найти с помощью уравнения, связывающего давление и объем в исследуемом процессе (см. рис. 5.1):

$$p_0 = \alpha V_0;\ p_1 = \alpha V_1.$$

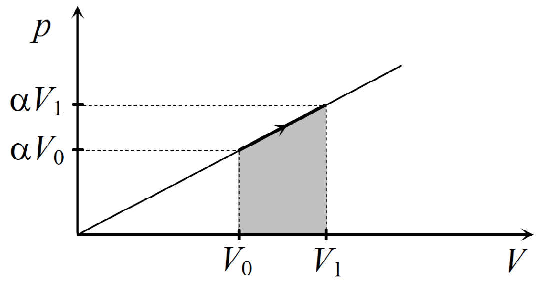


Рис. 5.1

Найдем площадь выделенной на рис. 5.1 фигуры (которая представляет собой трапецию с основаниями αV_0 и αV_1 и высотой $V_1 - V_0$). Таким образом, определим работу газа при его нагревании на ΔT:

$$A = \frac{\alpha V_0 + \alpha V_1}{2}\left(V_1 - V_0\right) = \frac{\alpha V_1^2 - \alpha V_0^2}{2}\ .$$

Применяем закон Клапейрона–Менделеева к начальному (с объемом V_0) и конечному (с объемом V_1) состояниям газа:

$$\nu RT_0 = p_0V_0 = \alpha V_0^2, \quad \nu RT_1 = p_1V_1 = \alpha V_1^2$$

где T_0 и T_1 – температуры газа в начальном и конечном состояниях.

Вычитая первую формулу из второй и подставляя найденную разность в выше полученное соотношение для вычисления работы, получим:

$$A = \frac{1}{2}\nu R \cdot T$$

Теперь из первого закона термодинамики можно найти связь количества сообщенной теплоты и приращение температуры газа. Подставим полученное значение работы в первое соотношение, которое вывели при решении данной задачи. Таким образом найдем приращение температуры газа ΔT в исследуемом процессе при сообщении ему количества теплоты Q:

$$\Delta T = \frac{Q}{2\nu R}.$$

Как и должно быть, величина ΔT оказалась пропорциональной Q. Подставляя величину ΔT в определение теплоемкости $C = Q/\Delta T$, получим значение для теплоемкости газа в исследуемом процессе:

$$C = 2\nu R.$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. С некоторым объемом идеального газа осуществляется цикл, показанный на рис. 5.2. Минимальная температура газа, достигаемая при выполнении цикла, равна T_{min}. Какой объем занимает газ, когда его температура при выполнении цикла станет равной $2T_{min}$?

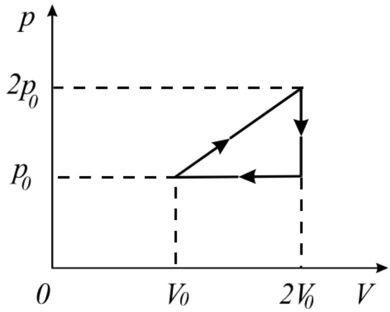


Рис. 5.2

2. С идеальным газом совершают процесс, показанный на рис. 5.3 на pV-диаграмме. Получает или отдает газ тепло при прохождении

точек, в которых являются минимальными: а) давление, б) температура, в) объем?

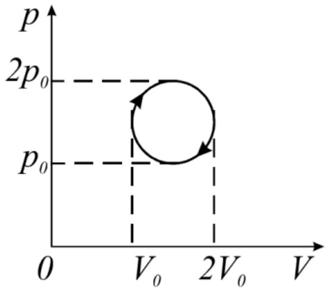


Рис. 5.3

3. Внутри сосуда объема V помещена резиновая оболочка объема $V/4$. И сосуд, и оболочка заполнены идеальным газом. В начальном состоянии температура газа T_0 и оболочка не растянута. Когда газ внутри оболочки нагрели до температуры T_1, сохраняя температуру остального газа неизменной, оболочка раздулась, и ее объем увеличился вдвое. До какой температуры нужно охладить газ в сосуде, поддерживая температуру T_0 внутри оболочки, чтобы она раздулась до тех же размеров? Считать, что упругие свойства оболочки не зависят от температуры.

4. При проведении процесса, изображенного на pV диаграмме (рис. 5.4), газ водород совершил работу 5 МДж при постоянном давлении и температуре. Определите величину изменения массы газа в этом процессе, если температура нулевая по Цельсию. Газ можно считать идеальным.

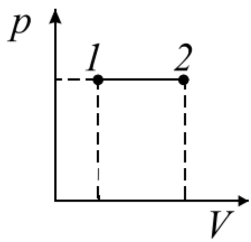


Рис. 5.4

5. Имеется теплоизолированный сосуд сложной формы (рис. 5.5), заполненный неоном при давлении P и температуре T. Трубка объемом V

соединена небольшим отверстием с так называемым балластным объемом. Через трубку пропускают кратковременный импульс тока длительностью τ. Сила тока I, напряжение U. Для газа в разрядной трубке найдите: а) максимальную температуру, б) температуру в момент, когда давление в трубке и в балластном объеме сравняются. Величина балластного объема намного превышает объем трубки. Известно, что при адиабатическом процессе величина T^5/p^2 остается постоянной.

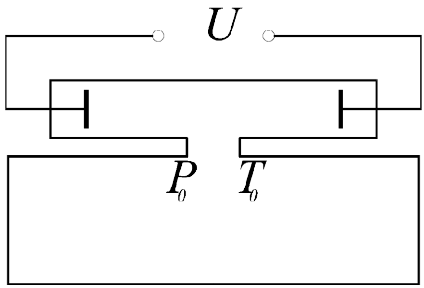


Рис. 5.5

6. ОПТИКА

Свет – это электромагнитные волны, вызывающие зрительное ощущение. Их длина лежит в пределах от 0,4 до 0,8 мкм. Как всякие волны свет огибает препятствия на пути его распространения, испытывая дифракцию. Однако, с увеличением размеров препятствий способность света огибать препятствия уменьшается. В большинстве практических случаев этим явлением можно пренебречь. В таких случаях свет распространяется в виде узких, почти параллельных пучков.

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Луч – это направление распространения энергии в световом пучке, т.е. это прямая линия. Чем уже световой пучок, тем точнее он определяет направление луча.

Закон прямолинейного распространения света. В однородной среде свет распространяется вдоль прямых линий.

Закон отражения света. Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр к отражающей поверхности, восставленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости, причем угол отражения равен углу падения (рис.6.1).

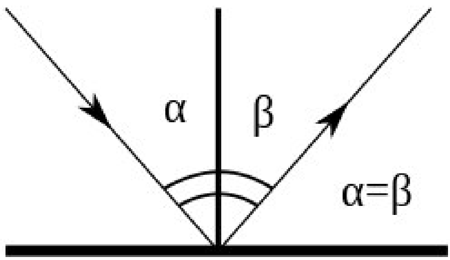


Рис. 6.1. Закон отражения света

Закон преломления света. Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восставленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения (α) к синусу угла преломления (γ) есть величина постоянная для данных двух сред (рис. 6.2):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21}$$

Величину n_{21} называют относительным показателем преломления или показателем преломления второй среды относительно первой.

Абсолютным (табличным) показателем преломления среды называют показатель преломления среды относительно вакуума.

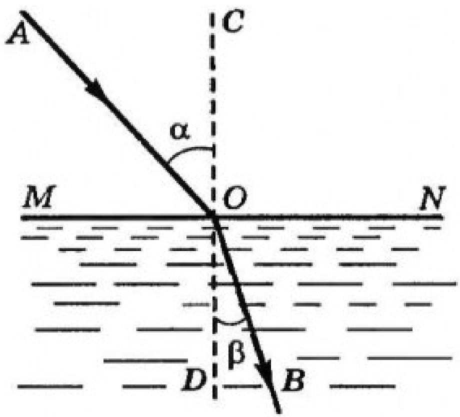


Рис. 6.2. Закон преломления света

Относительный показатель преломления n_{21} связан с абсолютными показателями преломления первой среды n_1, второй среды n_2:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

Среду с меньшим показателем преломления называют оптически менее плотной. При падении света на границу двух сред со стороны оптически более плотной среды происходит полное отражение, если угол падения больше или равен углу α_0 , называемому предельным углом полного отражения.

Формально углу α_0 соответствует угол преломления, равный 90°, поэтому:

$$\frac{sin\alpha}{sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}$$

Если свет переходит из данной среды (n_1= n) в вакуум (n_2=1), то:

$$sin\alpha_0 = \frac{1}{n}$$

Линза – это прозрачное тело, ограниченное сферическими поверхностями. Гомоцентрическим называют пучок лучей, пересекающихся в одной точке. Основное свойство линзы: она сохраняет гомоцентричность световых пучков.

Оптической силой линзы называют величину, обратную фокусному расстоянию:

$$D = \frac{1}{F}$$

Единица оптической силы – диоптрия (дптр).

Интерференцией света – это сложение световых пучков, приводящее к образованию устойчивой во времени картины светлых и темных полос. Интерференция света возможна только от когерентных источников (рис. 6.3).

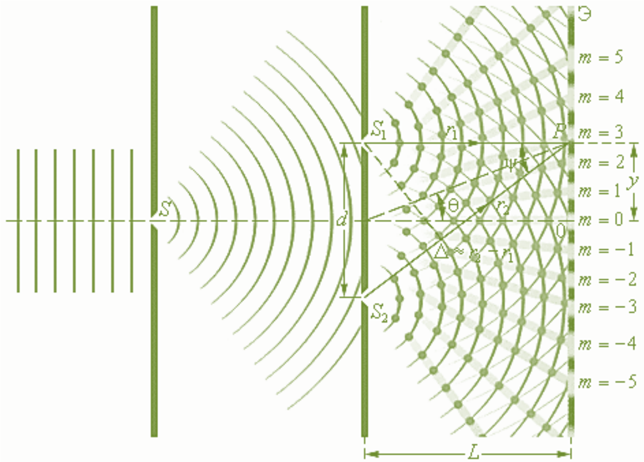


Рис. 6.3. Принцип Гюйгенса-Френеля

Опыт на рис. 6.3. демонстрации принцип Гюгенса-Френеля: каждая точка волнового фронта сама является источником сферических волн, причем все вторичные источники когерентны, и волновой фронт в следующий момент времени является следствием интерференции волн от этих точечных источников. Иными словами, возникшая в соответствии с принципом Гюйгенса сферическая волна от отверстия S возбудила в S_1 и S_2 когерентные колебания. Вследствие дифракции от этих отверстий выходят два световых конуса, которые частично перекрылись. Френель объединил принцип Гюйгенса с идеей интерференции вторичных волн.

Дифракцией света – это огибание световыми волнами препятствий.

Дифракция света происходит тем заметнее, чем меньше отношение $\frac{D}{\lambda}$ где D – линейные размеры препятствия или отверстия в экране. Поскольку длина волны λ измеряется в долях микрометра (1мкм=10^{-6} м), то практически дифракция наблюдается лишь при очень малых величинах D. Это осуществляется в дифракционной решетке, представляющей собой совокупность очень узких щелей, разделенных непрозрачными промежутками. Суммарная ширина d прозрачного и непрозрачного промежутков называется периодом решетки. Если на дифракционную решетку падает нормально к ее поверхности монохроматический (одноцветный) свет с длиной волны λ, то в результате явления дифракции на стоящий за решеткой экран лучи пойдут не только прямо, но еще и по направлениям, составляющим углы $\pm\varphi_1$, $\pm\varphi_2$, $\pm\varphi_3$,..... с первоначальным направлением. Эти углы определяются формулой:

$$d \cdot sin\varphi = \pm k \cdot \lambda$$

где k = 0, 1, 2, 3,...

Каждому значению k соответствует по два угла $\pm\varphi$. С помощью представленной формулы можно опытным путем определить длину волны монохроматического света.

Дисперсия света – это зависимость показателя преломления вещества от цвета, падающего на него света. Это проявляется в том, что, если направить узкий пучок солнечного света на призму, он выйдет из призмы в виде веера цветных лучей (рис. 6.4).

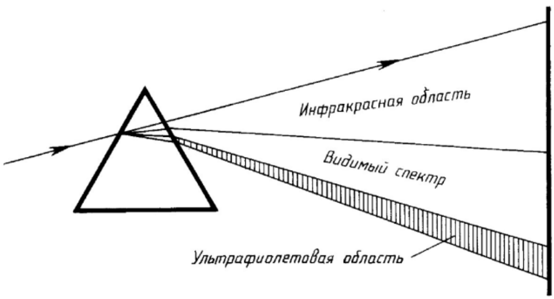


Рис. 6.4. дисперсия света

Цвет определяется длиной волны. С другой стороны, по волновой теории абсолютный показатель преломления вещества равен отношению скорости света в вакууме c = $3 \cdot 10^8$ м/с к скорости света в веществе v:

$$n = \frac{c}{v}$$

Таким образом в основе дисперсии лежит зависимость скорости распространения световых (электромагнитных) колебаний в веществе от их частоты.

В качестве примера рассмотрим решение задачи.

На рис. 6.5 показана интерференционная схема с бизеркалами Френеля.

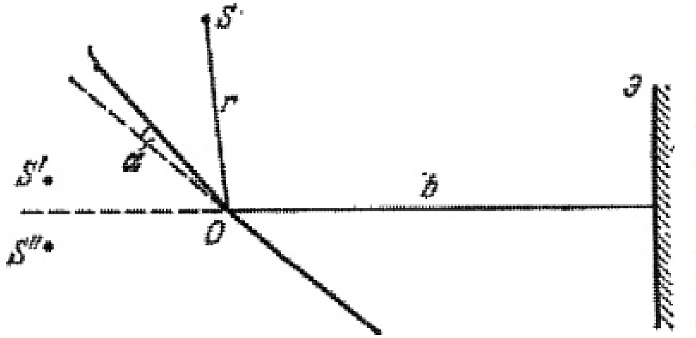


Рис. 6.5

Угол между зеркалами α = 12°, расстояния от линии пересечения зеркал до узкой щели S и экрана Э равны соответственно r = 10 см и b = 130 см. Длина волны λ= 0,55 мкм. Определить:

а) ширину интерференционной полосы на экране и число возможных максимумов;

б) сдвиг интерференционной картины на экране при смещении щели на δL = 1.0 мм по дуге радиуса r с центром в точке O;

в) при какой максимальной ширине щели δ_{max} интерференционные полосы на экране будут наблюдаться еще достаточно отчетливо?

Решение.

Бизеркала Френеля используются для получения интерференции от одного источника света (например, раскаленной нити) методом деления волнового фронта на две приблизительно равные части. Действительно, свет после отражения от зеркал распространяется так, будто он вышел из двух когерентных источников S_1 и S_2, являющихся мнимыми изображениями источника. Так как угол между зеркалами мал, то мало и расстояние между мнимыми изображениями источника, что дает необходимое условие когерентности интерферирующих волн.

А) Получим формулу для ширины интерференционной полосы. В точку на экране, определяющуюся координатой x, волны от источников S_1 и S_2 дойдут, пройдя в воздухе расстояния соответственно:

$$L_1 = \sqrt{\left(r+b\right)^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2},$$

$$L_1 = \sqrt{\left(r+b\right)^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2}.$$

Если разность хода лучей $L_2 - L_1$ будет равна целому числу длин волн, то в этой точке экрана будет максимум освещенности. Исходя из этого получаем формулу, определяющую положение максимумов:

$$x_m = \frac{r+b}{d}\lambda m,$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ – порядок максимума, d – расстояние между источниками S_1 и S_2. Расстояние между соседними максимумами и дает ширину интерференционной полосы, равную:

$$\Delta x = \frac{r+b}{d}\lambda$$

Величина d с учетом малого угла α между зеркалами можно записать в виде $d = 2 \cdot sin\alpha \approx 2 \cdot r \cdot \alpha$. Подставляя данные в условии задачи значения выходящих в формулу величин, получаем:

$$\Delta x = \frac{r+b}{2r\alpha}\lambda = 1{,}1 \text{ мм}$$

Интерференция на экране будет наблюдаться лишь в области перекрытия волн, отраженных от бизеркала. На рис. 6.6 эта область ограничена точками P и Q. Зная ширину интерференционной полосы и найдя из подобия треугольников S_1OS_2 и POQ длину отрезка PQ, можно определить максимально возможное число интерференционных полос на экране:

$$N = \frac{PQ}{\Delta x} = \frac{2b\alpha}{\Delta x} = \frac{4br\alpha}{\lambda(r+b)} = 9$$

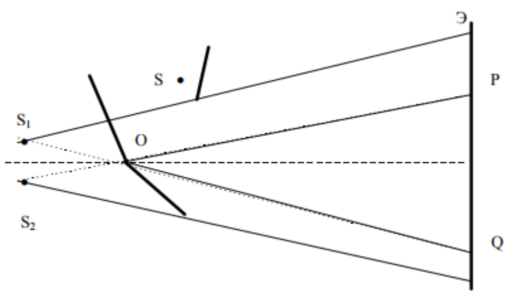


Рис. 6.6

Отметим, что на экране может наблюдаться и меньшее число полос. Это связано с длиной когерентности волны, испускаемой источником S.

Б) При смещении щели S по дуге радиуса r с центром в точке O на δL оба мнимых изображения этого источника сместятся на то же расстояние по кругу в ту же сторону и займут положения S_{12} и S_{22}. Поэтому вся интерференционная картина сместится по экрану на расстояние, которое можно будет определить из подобия треугольников $S_{12}OS_{22}$ и O_2OO_1 (рис. 6.7):

$$\frac{\delta L}{r} = \frac{\delta x}{b}$$

По этому

$$\delta x = \frac{b}{r} \delta L$$

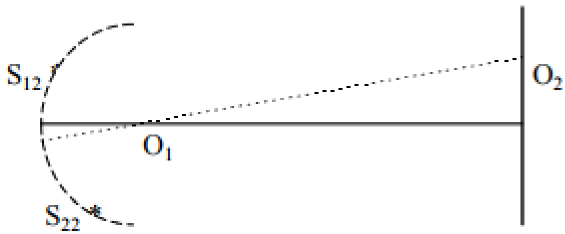


Рис. 6.7

В) Ширина щели определяет размер источника. Если он протяженный, то интерференционные картины, полученные от *краев* щели как от самостоятельных источников, могут гасить друг друга. В результате в этом случае светлая полоса одной интерференционной картины наложится на темную полосу другой и на экране получится почти равномерная засветка. Края щели можно считать отдельными источниками, смещенными друг от друга на расстояние δ. Используя результат пункта Б) этой задачи, можно сказать, что интерференционные картины от этих двух источников будут сдвинуты на расстояние δx друг относительно друга. Если $\delta x \leq \frac{\Delta x}{2}x$, то интерференционная картина еще будет резкой. Поэтому максимальный размер щели будет равен:

$$\delta_{max} = \frac{r + b}{r} \cdot \frac{\lambda}{4\alpha} = 43 \text{ мкм.}$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. В стекле с показателем преломления $n_1 = 1,5$ имеется сферическая полость радиуса $R = 4,5$ см, заполненная водой. Показатель преломления воды $n_2 = 4/3$. На полость падает широкий пучок параллельных световых лучей. Определить радиус r пучка световых лучей, которые проникают в полость.

2. Два параллельных луча, расстояние между которыми равно радиусу R круглого прямого прозрачного цилиндра, падают на боковую поверхность этого цилиндра. Лучи параллельны основанию цилиндра. Найти величину показателя преломления n материала цилиндра, при которой лучи пересекаются на его поверхности.

3. На диафрагму с круглым отверстием радиусом $r=1$ мм падает нормально параллельный пучок света длиной волны $\lambda=0,05$ мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние b_{max} от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

4. На щель шириной $a=0,1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda=0,6$ мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L=1$ м.

7. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса позволяют находить решения механических задач в тех случаях, когда действующие силы неизвестны. Примером такого рода задач является ударное взаимодействие тел.

Ударом (или столкновением) принято называть кратковременное взаимодействие тел, в результате которого их скорости испытывают значительные изменения. Во время столкновения тел между ними действуют кратковременные ударные силы, величина которых, как правило, неизвестна. Поэтому нельзя рассматривать ударное взаимодействие непосредственно с помощью законов Ньютона. Применение законов сохранения энергии и импульса во многих случаях позволяет исключить из рассмотрения сам процесс столкновения и получить связь между скоростями тел до и после столкновения, минуя все промежуточные значения этих величин.

В механике часто используются две модели ударного взаимодействия – абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

Абсолютно неупругим ударом называют такое ударное взаимодействие, при котором тела соединяются (слипаются) друг с другом и движутся дальше как одно тело.

Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

Импульс (количество движения) – векторная физическая величина, являющаяся мерой механического движения тела. В классической механике импульс тела равен произведению массы m этого тела на его скорость v, направление импульса совпадает с направлением вектора скорости:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Импульс системы тел (материальных точек):

$$\vec{p} = \sum m\vec{v}.$$

Закон сохранения импульса

а) Если система замкнута, т. е. внешние силы отсутствуют, или если их сумма равна нулю, то импульс системы сохраняется:

$$\sum \vec{p} = \text{const}$$

б) Если внешние силы перпендикулярны некоторой оси *x,* то проекция импульса системы на это направление сохраняется:

$$\Sigma p_x = \text{const}$$

Закон сохранения импульса при абсолютно неупругом ударе:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

При упругом ударе:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Центр масс, центр инерции, барицентр – геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц как целого. Не является тождественным понятию центра тяжести (хотя чаще всего совпадает).

Координата центра масс системы тел:

$$x_{\text{ц}} = \frac{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots)}{(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots)},$$

аналогично для $y_{\text{ц}}$, $z_{\text{ц}}$.

Центр масс симметричного тела однородного тела лежит в центре симметрии.

Импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость центра масс:

$$v_{\text{ц}} = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \cdots)}{(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots)} = \frac{p}{m}.$$

Ускорение центра масс равно ускорению точки массой m, равной массе системы, к которой приложена равнодействующая внешних сил:

$$F_{\text{ВН}} = m a_{\text{ц}}$$

Закон сохранения энергии – фундаментальный закон природы, установленный эмпирически и заключающийся в том, что для изолированной физической системы может быть введена скалярная физическая величина, являющаяся функцией параметров системы и называемая энергией, которая сохраняется с течением времени.

Механическая работа – это физическая величина – скалярная количественная мера действия силы (равнодействующей сил) на тело или сил на систему тел. Зависит от численной величины и направления силы (сил), и от перемещения тела (системы тел):

$$A = FS \cdot cos\alpha$$

где α − угол между силой (F) и перемещением (S).

Общая связь между энергий системы и работой внешних сил:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A$$

Работа силы линейно зависит от перемещения:

$$A = F_{\text{ср}} S = \frac{(F_{1s} + F_{2s})S}{2}$$

где F_{1S}, F_{2S} − проекции силы на перемещение в начальной и конечной точках.

Средняя мощность за время t:

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{t} = F_s v_{\text{ср}}$$

Мгновенная мощность (или просто мощность):

$$P(t) = F_v cos \propto = F_v V,$$

где α − угол между силой и скоростью точки ее приложения, F_v − проекция силы на направление скорости. Мощность измеряется в ваттах (Вт = Дж/с).

Кинетическая энергия материальной точки:

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия системы (двух) тел:

$$E_K = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2}^2}{2}$$

Теорема о кинетической энергии:

$$\Delta E_K = A,$$

изменение кинетической энергии равно работе всех действующих сил.

Потенциальная энергия силы тяжести:

$$E_p = mgh,$$

где h отсчитывается от произвольно выбранного нулевого уровня. Для протяженного тела h − высота центра тяжести.

Потенциальная энергия силы упругости:

$$E_p = \frac{kx^2}{2},$$

где за ноль принята энергия недеформированной пружины.

Изменение потенциальной энергии (для силы тяжести, упругости, кулоновского взаимодействия − любой силы, работа которой не зависит от траектории):

$$\Delta E_p = -A$$

где A − работа самой силы взаимодействия.

Если в замкнутой системе действуют только силы тяжести, упругости и кулоновского взаимодействия, то механическая энергия системы сохраняется:

$$E_{\text{мех}} = E_K + E_p = const.$$

Изменение механической энергии под действием внешних сил и внутренних сил трения равно суммарной работе этих сил:

$$\Delta E = A_{\text{вн}} + A_{mp}.$$

Задача. Мяч подняли на высоту H и отпустили, после чего он ударился о поверхность. Определить высоту, на которую поднялся мяч после удара, если скорость мяча перед ударом была v, а после удара стала $v/2$.

Решение.

Полная механическая энергия мяча до удара о поверхность постоянна и равна сумме его потенциальной и кинетической энергией $E=E_p+E_k=\text{const}$. В момент, когда мяч находится на высоте H над землей, его кинетическая энергия $E_k=0$, а потенциальная $E_p=mgH$, где m – масса мяча.

Кинетическая энергия перед ударом о землю: $E_k=\frac{mv^2}{2}$, где v – скорость мяча в этот момент, $E_p=0$.

Таким образом, для мяча до удара о землю можно записать: $E_p=mgH=\frac{mv^2}{2}$. При ударе мяч теряет некоторое количество энергии, выделяя ее в виде теплоты. Его кинетическая энергия после удара:

$$E_k' = \frac{m(\frac{v}{2})^2}{2} = \frac{1}{4}\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4}E_k .$$

Для полной механической энергии мяча после удара:

$$E' = E_p' + E_k' ,$$

где E_p' - потенциальная энергия мяча после удара:

$$E' = mgH' = \frac{1}{4}\frac{mv^2}{2} ,$$

где H' – максимальная высота, на которую поднимается мяч после удара. Так как $mgH=\frac{mv^2}{2}$, то получаем: $mgH' = \frac{1}{4}mhH$, или $H' = \frac{1}{4}H$.

Задача. Два бруска с массами m_1 и m_2, соединенные недеформированной легкой пружиной, лежат на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между брусками и плоскостью μ. Какую минимальную силу нужно приложить в горизонтальном направлении к бруску массой m_1, чтобы другой брусок сдвинулся с места?

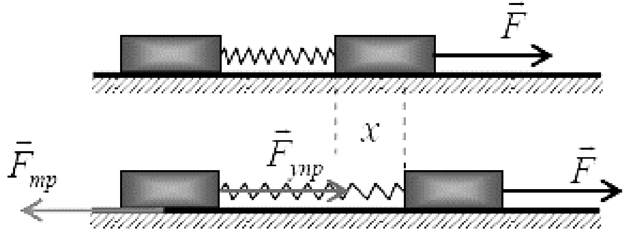


Рис. 7.1

Решение.

Для того, чтобы второй брусок сдвинулся, необходимо, чтобы сила реакции пружины при деформации достигла значения силы трения скольжения

$$kx = \mu m_2 g,$$

где k − жесткость пружины, постоянная величина.

Работа, совершенная силой равна работе против силы трения, действующей на груз массой m_1 и работе по деформации пружины на необходимую величину $\boldsymbol{x}$, которую находим из условия:

$$Fx - kx^2/2 - \mu m_1 g x = 0.$$

Сократив на x:

$$kx/2 = F - \mu m_1 g.$$

Делая замену:

$$F = \mu g(m_1 + m_2/2).$$

Задача 3. Взрыв разделяет камень на три части. Два куска летят под прямым углом друг к другу: килограммовый со скоростью 12 м/с и двухкилограммовый со скоростью 8 м/с. Третий кусок отлетает со скоростью 40 м/с. 1) Определить массу третьего куска. 2) Начертить диаграмму, показывающую направления всех трех кусков.

Решение.

1. Кратко записываем условие задачи.

2. Изображаем условие графически, обозначая на рисунке систему отсчета. Вдоль осей отложены импульсы осколков. Поскольку первые два осколка удачно разлетелись под прямым углом, то удобно взять прямоугольную систему координат, оси которой совпадают с направлениями разлета.

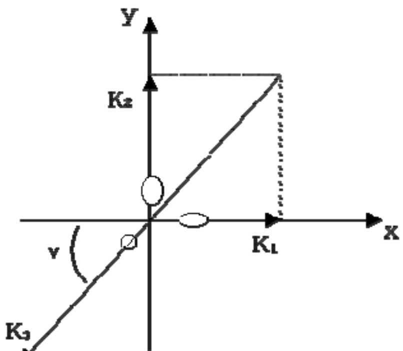


Рис. 7.2

3. Записываем закон сохранения импульса в проекциях на выбранную ось. Так как камень сначала покоился, то его импульс до разлета был равен нулю:

$$K_1+K_2+K_3=0$$

4. Решаем уравнения в общем виде. Применяем геометрические соотношения, суть которых ясна из рис. 7.2:

$$\left|K_3\right| = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$$

$$\sin\gamma = -\frac{K_2}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}$$

$$\left|K_3\right| = \sqrt{\left(m_1 v_1\right)^2 + \left(m_2 v_2\right)^2}$$

$$\sin\gamma = -\frac{m_2 v_2}{\sqrt{\left(m_1 v_1\right)^2 + \left(m_2 v_2\right)^2}}$$

5. Подставляем величины в общее решение, вычисляем:

$$\left|K_3\right| = \sqrt{\left(1\cdot 12\right)^2 + \left(2\cdot 8\right)^2} = 20$$

$$\left|K_3\right| = m_3 v_3$$

$$m_3 = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ кг.}$$

$$\sin\gamma = -\frac{m_2 v_2}{\sqrt{\left(m_1 v_1\right)^2 + \left(m_2 v_2\right)^2}} = -\frac{16}{20} = -0,8$$

$$\gamma = \arcsin\left(-0,8\right) = 233°$$

Ответ: масса третьего осколка 0,5 кг, направление его полета примерно 233 градуса или 53 градуса по отношению к оси абсцисс в отрицательную сторону.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Самолет массой 2 т движется в горизонтальном направлении со скоростью 50 м/с. Находясь на высоте 420 м, он переходит на снижение при выключенном двигателе и достигает дорожки аэродрома со скоростью 30 м/с. Определить работу силы сопротивления воздуха во время планирующего полета.

2. С какой начальной скоростью v_0 надо бросить вертикально вниз мяч с высоты H, чтобы он после удара о землю подпрыгнул относи-

тельно начального уровня на высоту: а) Δh = 10 м; б) $\Delta h = h$? Считать удар абсолютно упругим.

3. С какой высоты H падает тело массой m на невесомую пружину жесткостью k, если максимальная сила давления на пол равна N? Длина свободной пружины равна 1.

4. Пуля массой m=10 г, летящая горизонтально со скоростью v=50 м/с, попадает в ящик с песком массой M=50 кг, подвешенный на веревке, и застревает в нем. На какую высоту поднимется ящик, отклоняясь после попадания пули?

5. Две одинаковые легкие тележки, на которых сидят два одинаковых дворника, катятся по инерции параллельно друг другу с одинаковыми скоростями по очень скользкому льду. Начинает па дать снег. Дворник, сидящий на одной из тележек, сбрасывает падающий на нее снег равномерно в разные стороны, а дворник, находящийся на другой тележке, спит. Какая из тележек быстрее пройдет одно и то же расстояние? Тележки не могут двигаться в направлении, перпендикулярном колесам.

6. Тележка массой M движется по неподвижному горизонтальному конвейеру. В момент, когда тележка въезжает на конвейер и ее скорость равна v_0, на нее сверху опускается заготовка массой m. Через одну секунду в тележке под заготовкой открывается люк, и заготовка падает на конвейер. Еще через секунду на тележку снова опускается такая же заготовка, затем через секунду под заготовкой опять открывается люк, и т. д. Какую скорость будет иметь тележка через $2n$ секунд после начала движения в момент, когда на тележку опустилась очередная заготовка? Силой трения между тележкой и конвейером пренебречь.

7. На вершине гладкого полусферического купола радиусом R находится небольшой шарик массой m. На него налетает такой же по размерам шарик массой $2m$. Происходит упругий лобовой удар. Скорость налетающего шарика минимально возможная, чтобы шарик массой m сразу же после удара оторвался от купола. На какой высоте H от основания купола оторвется шарик массой $2m$?

8. По гладкому горизонтальному проволочному кольцу могут скользить без трения две маленькие бусинки массами m и $2m$. Вначале бусинки находились в точке A кольца, как показано на рис.7.2. Бусинкам сообщают начальные скорости: бусинке массой m – скорость $2v$, а бусинке массой $2m$ – скорость v, направленные в противоположные стороны. В процессе своего движения бусинки многократно сталкиваются друг с другом. Считая столкновения бусинок абсолютно упругими, определите угол AOC, если C – точка, в которой оказываются бусинки в момент их 101-го столкновения.

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАНИЯ ПРОШЛЫХ ЛЕТ

Математика 10 класс

1. Сумма цифр трехзначного числа равна 14, если цифры первоначального числа записать в обратном порядке и из полученного числа вычесть первоначальное число, то получится -198. Цифра, обозначающая десятки на 3 меньше цифры, стоящей в разряде единиц. Найдите первоначальное число

2. Лодка спускается вниз по течению реки из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 10 км, а затем возвращается в пункт А. Если бы собственная скорость лодки была 3 км/ч, то путь от А до В занял бы на 2 часа 30 минут меньше, чем путь от В до А. Какой должна быть собственная скорость лодки (в км/час), чтобы поездка из пункта А в пункт В заняла 2 часа?

3. Определите число по описанию. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5.

4. Велосипедист проехал 96 км на два часа быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем предполагал ранее проезжать за 1 час 15 минут. Найти, с какой скоростью (в км/час) он ехал.

5. Определите число по описанию. Некоторое трехзначное число оканчивается цифрой 2, если ее перенести в начало, то полученное число будет на 18 больше первоначально.

6. Мастеру и ученику было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как мастер проработал 7 часов, а ученик 4 часа, оказалось, что они выполнили 5/9 всей работы. Проработав вместе еще 4 часа, они установили, что остается выполнить еще 1/18 часть всей работы. За сколько часов выполнил бы всю работу ученик, работая один.

7. Решите уравнение:

$$\frac{8x^3-27}{x+3}=\frac{405+270x+180x^2}{3-x}.$$

8. Решите уравнение:

$$\sqrt{2x-13}+\sqrt{20-x}-\sqrt{3x-21}=0\,.$$

9. Решите уравнение:

$$|2x+15|=22-|2x-7|\,.$$

10. Сумма 3-го и 8-го членов арифметической прогрессии равна 11, сумма 2-го и 11-го ее членов равна 17, а сумма первых n членов этой прогрессии равна 55. Найдите n.

11. Окружность радиуса 3, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов этого треугольника. Найдите площадь треугольника ABC, если $OA = 5$.

12. Решите уравнение:

$$(8x^3+27)\cdot(2x+15)=(12x^2-18x+27)\cdot(26x-15).$$

13. Решите уравнение:

$$\sqrt{2x+6}+\sqrt{x+1}-\sqrt{7x-5}=0.$$

14. Решите уравнение:

$$|x|-|x+2|=2.$$

15. Найдите число членов конечной геометрической прогрессии, у которой 2-й и 5-й члены соответственно равны 14 и 112, а сумма всех членов равна 889.

16. Найдите периметр равностороннего треугольника, если центр описанной около него окружности удален от хорды длины 2 на расстояние 3.

17. Дана арифметическая прогрессия a_1, a_2, ... a_n, ... и два различных числа x и y такие, что числа a_{11}, x, a_{14}, y, a_{38} образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите x/y.

18. Решите неравенство:

$$\sqrt{2x^2-22|x|+60}\le 9-|x|.$$

19. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 25xy^2 = 4x(5x+7) \\ 2(10y-11)y = 5xy \end{cases}$$

20. Окружность касается гипотенузы прямоугольного треугольника и продолжений катетов. Точка касания D делит гипотенузу AB на две части: AD и DB. Найдите тангенс меньшего угла треугольника ABC, если известно, что $|AD|:|DB|=10:3$.

21. Катер (с постоянной скоростью) и теплоход (с постоянной скоростью) отправились одновременно из пункта А вниз по течению реки, при этом собственная скорость катера была в два раза больше собственной скорости теплохода. Через 4 минуты катер повернул обратно и уменьшил собственную скорость в два раза. Найдите, через сколько

времени (в часах) после начала движения из пункта А катер встретил теплоход, если во всех случаях собственная скорость – это скорость в стоячей воде.

Математика 11 класс

1. Решите уравнение:

$$\frac{27+8x^3}{22x+23}=\frac{4x^2-6x+9}{2x+7}.$$

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{xy-6x-3y+18}+60\sqrt{x-3}=210\sqrt{y-6}\\ 75\sqrt{x-3}=240\sqrt{y-6}+\sqrt{xy-6x-3y+18}\end{cases}.$$

3. Решите неравенство:

$$\sqrt{x-6}\ge x-8.$$

4. Две равные хорды окружности образуют вписанный угол, величина которого равна 30°. Найдите отношение площади части круга, лежащей внутри этого угла к площади всего круга.

5. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма её первого и четвертого членов равна 9, а произведение второго и третьего членов этой прогрессии равно 8. Найдите сумму всех членов данной прогрессии.

6. Решите уравнение:

$$(125x^3+64)\cdot(5x+16) = (50x^2-40x+32)\cdot(15x+8).$$

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}2\sqrt{xy+x+8y+8}+4\sqrt{x+8}=5\sqrt{y+1}\\ 24\sqrt{x+8}=4\sqrt{y+1}+\sqrt{xy+x+8y+8}\end{cases}.$$

8. Решите неравенство:

$$x-11<\sqrt{x-5}\ .$$

9. Найдите площадь выпуклого четырехугольника с диагоналями 3 и 4, если равны отрезки, соединяющие середины противоположных сторон этого четырехугольника.

10. Сумма первых трех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 7, а сумма квадратов этих членов прогрессии равна 21. Найдите сумму всех членов этой прогрессии.

11. Решите уравнение:

$$32x^2 - 12x(x^2 + 3x - 6) + (x^2 + 3x - 6)^2 = 0$$

12. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy^2 = x(0{,}5x + 0{,}25) \\ (x + y)y = 2{,}5y \end{cases}$$

13. Найдите все значения, при которых числа $\sin(3x/2)$. $\sqrt{3} \cdot \sin x \cdot \sin(5x/2)$, $-\sin(7x/2)$, в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.

14. Найдите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2\sin((x + 21\pi) / 9)$ в точке пересечения графика с осью OY.

15. Между двумя городами с постоянной скоростью курсирует автобус. Затраты на один рейс слагаются из двух частей: первая, связанная с обслуживанием, пропорциональна квадрату времени нахождения в пути; вторая, связанная с расходом топлива, пропорциональна квадрату скорости движения. Известно, что, если время в пути составляет 5 часов, то стоимость рейса составляет 1282 рубля, а стоимость обслуживания равна 625/16 стоимости топлива. Найдите минимальную стоимость одного рейса (в рублях) и время (в часах), которое он занимает.

16. Вычислить значение выражения:

$$\log_4\left(4^{0,75} \cdot 2^{0,5} : 8^{\frac{1}{3}}\right)$$

17. Рассчитайте сумму первых трех членов арифметической прогрессии. Если от деления ее шестнадцатого члена на пятый в частном получается 3, а от деления двадцать первого члена на шестой в частном получается 3 и 12 в остатке.

18. Вычислить значение выражения:

$$\log_3\left(9^{0,75} \cdot 81^{0,5} : 9^{\frac{1}{2}}\right)$$

19. Определите сумму первых десяти членов возрастающей арифметической прогрессии, если: сумма второго и шестнадцатого ее членов равна 52, а произведение этих членов равно 235.

20. Вычислить значение выражения:

$$\log_2\left(16^{0,75} \cdot 8^{0,5} : 256^{\frac{1}{4}}\right)$$

21. Определите сумму первых четырех членов арифметической прогрессии, если от деления ее восьмого члена на третий в частном

получается 3, а от деления семнадцатого члена на девятый в частном получается 1 и 16 в остатке.

Физика 10 класс

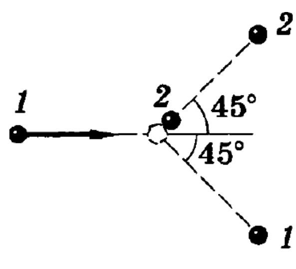
1. С судна массой 750 т произведен выстрел из пушки в сторону, противоположную его движению, под углом 60° к горизонту. На сколько изменилась скорость судна, если снаряд массой 30 кг вылетел со скоростью 1 км/с относительно судна? Ответ приведите в системе СИ.

2. Санки массой 10 кг скатились с горы высотой 5 м и остановились на горизонтальном участке. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы вернуть санки на гору по линии их скольжения? Ответ привести в системе СИ.

3. Фигурист массой 60 кг, стоя на льду, ловит букет массой 500 г, который летит горизонтально со скоростью 20 м/с. На какое расстояние откатится фигурист с букетом по поверхности льда, если коэффициент трения принять равным 0,05?

4. Расстояние между двумя станциями поезд прошел со средней скоростью 72 км/ч за треть часа. Разгон и торможение вместе длились 4 минуты, а остальное время поезд двигался равномерно и прямолинейно. Какова была скорость поезда при равномерном движении?

5. Бильярдный шар (1), движущийся со скоростью 10 м/с, ударился о покоящийся шар (2) такой же массы. После удара шары разошлись в соответствии с рисунком. Определите скорость шара (1) после соударения.



6. Определите жесткость пружины, которая получена при соединении двух пружин. Первая имеет жесткость k_1, а вторая k_2.

7. Два автомобиля выходят из пункта *A* в одном направлении. Второй автомобиль выходит на 20 с позже первого. Оба движутся равноускорено с одинаковым ускорением 0,4 м/с^2. Через какое время, считая от начала движения первого автомобиля, расстояние между ними окажется равным 240 м?

8. Камень брошен с поверхности Земли со скоростью 20 м/с под углом 60° к горизонту. Запишите кинематические уравнения движения и выведите уравнение траектории камня. Определите радиус кривизны его траектории в верхней точке ($g = 9{,}81$ м/с^2).

9. Стационарный искусственный спутник движется по окружности в плоскости земного экватора, оставаясь все время над одним и тем же пунктом земной поверхности. Определите радиус орбиты спутника. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 . Радиус Земли $R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м. Масса Земли $M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг.

10. К пружине подвешен груз массой 10 кг. Зная, что пружина под влиянием силы 9,81 Н растягивается на 1,5 см, определите, чему будет равен период гармонических колебаний груза, если систему вывести из положения равновесия?

11. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью 0,2 мкКл/м^2. Расстояние между пластинами равно 1 мм. На сколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния между пластинами до 3 мм? Электрическая постоянная $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 109$ Н · м^2 / Кл^2.

12. Поезд, вышедший в 12 часов дня из пункта A, движется со скоростью 60 км/ч. Поезд, вышедший в 14 часов из пункта B, движется со скоростью 40 км/ч навстречу первому поезду. В котором часу они встретятся, если расстояние AB равно 420 км?

13. Снаряд вылетает с поверхности Земли под углом 30°к горизонту. Запишите кинематические уравнения движения и выведите уравнение траектории. Определите начальную скорость снаряда, если он был на одной и той же высоте спустя 10 с и 50 с после начала движения ($g = 9{,}81$ м/с^2).

14. Искусственный спутник вращается вокруг Земли по окружности на высоте 3600 км над поверхностью Земли. Определите орбитальную скорость спутника. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 . Радиус Земли $R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м. Масса Земли $M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг.

15. Гиря, подвешенная к пружине, совершает гармонические колебания по вертикали с амплитудой 4 см. Определите полную энергию колебаний гири, если жесткость пружины равна 1 кН/м.

16. Определите емкость плоского конденсатора, между обкладками которого находится стеклянная пластинка толщиной 100 мкм, покрытая с обеих сторон слоями парафина толщиной $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ м каждый. Площадь обкладок конденсатора равна 0,02 м^2. Диэлектриче-

ская проницаемость стекла – 7, парафина – 2. Электрическая постоянная $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 109$ Н · м^2 / Кл^2.

17. Какова глубина шахты, если свободно падающий в неё камень достигает дна через 2 с после начала падения?

18. Период вращения искусственного спутника Земли равен 2 ч. Считая орбиту спутника круговой, найдите, на какой высоте над поверхностью Земли движется спутник. Масса Земли $M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг. Радиус Земли $R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^2/кг^2.

19. В однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл равномерно движется со скоростью 20 см/с проводник длиной 10 см. По проводнику течет ток 2 А. Скорость движения проводника направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции поля. Найдите работу перемещения проводника за 10 с.

20. Электрический колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,6 мкГн и конденсатора емкостью 40 пФ. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора 200 В. Определите максимальный ток в контуре.

21. Определите скорость электрона на первой боровской орбите, радиус которой определяется формулой $r_0 = \dfrac{\hbar^2}{kme^2}$, где e – заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, m – масса электрона $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, k – электрическая постоянная $9 \cdot 10^9\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, $\hbar$ – постоянная Планка $1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

22. В однородном магнитном поле с индукцией B равномерно со скоростью 20 см/с движется проводник длиной 10 см. По проводнику течет ток 2 А. Скорость движения проводника направлена перпендикулярно вектору индукции поля. Найдите индукцию B этого магнитного поля, если работа перемещения этого проводника в течение 10 с равна 0,2 Дж.

23. В однородном магнитном поле, индукция которого 0,1 Тл, движется проводник длиной 10 см. Скорость движения проводника равна 15 м/с, вектор скорости перпендикулярен вектору индукции магнитного поля. Чему равна индуцированная в проводнике разность потенциалов?

24. Ток в электрическом колебательном контуре изменяется по закону $i(t) = -0{,}02\sin(400\pi t)$ (А). Индуктивность катушки 1 Гн. Найдите максимальную энергию электрического поля в конденсаторе контура.

25. На какой диапазон электромагнитных волн, распространяющихся в воздухе, можно настроить электрический колебательный

контур, если индуктивность его катушки равна $2 \cdot 10^{-3}$ Гн, а емкость конденсатора может меняться от 68,9 до 533 пФ?

26. Вещество радиоактивного элемента после ряда превращений потеряло одну α- и две β^{-}-частицы и превратилось в ядро урана $_{92}U^{235}$. Напишите уравнение ядерной реакции. Найдите массовое число и зарядовое число исходного радиоактивного элемента.

27. Прямой провод длиной 10 см, по которому течет ток I, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл. Угол между направлениями вектора $\vec{B}$ и тока равен 30^0. На провод действует сила 10 мН. Найдите величину I этого тока.

28. Скорость самолета с реактивным двигателем равна 950 км/ч. Найдите разность потенциалов, возникающую на концах крыльев самолета, если вертикальная составляющая индукции земного магнитного поля равна 50 мкТл, а размах крыльев самолета равен 12,5 м.

29. Ток в электрическом колебательном контуре изменяется согласно уравнению $i(t) = -0{,}02\sin(400\pi t)$ (А). Индуктивность катушки 1 Гн. Найдите максимальную энергию магнитного поля в катушке контура.

30. Электрический колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 889 пФ и катушки индуктивностью 2 мГн. На какую длину волны настроен контур, если электромагнитная волна распространяется в воздухе?

31. В какой элемент превращается уран $_{92}U^{238}$ после трех α- и двух β^{+}-превращений? Напишите уравнение ядерной реакции. Найдите массовое число и зарядовое число образовавшегося ядра.

Физика 11 класс

1. Катер идет по течению реки из пункта A в пункт B за время 3 ч, обратно – за время 6 ч. Сколько времени потребуется катеру для того, чтобы пройти расстояние между пунктами A и B по течению при выключенном моторе?

2. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покоится. В результате центрального и прямого удара меньший шар потерял 3/4 своей кинетической энергии. Во сколько раз отличаются массы шаров?

3. Баллон вместимостью 12 л содержит углекислый газ. Давление газа равно 1 МПа, температура 300 К. Определите массу газа в баллоне. Молярная масса углекислого газа равна 0,044 кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/ (К·моль).

4. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, получив от нагревателя количество теплоты 4,2 кДж, совершил работу 590 Дж. Найдите термический КПД этого цикла. Во сколько раз температура нагревателя больше температуры холодильника?

5. В цепи, состоящей из источника тока с ЭДС 6,0 В, внутренним сопротивлением 2,0 Ом и внешним сопротивлением, идет ток 1,0 А. Какой ток пойдет по цепи, если внешнее сопротивление увеличить в 2,0 раза?

6. Самолет летит из пункта A в пункт B и обратно со скоростью 300 км/ч относительно воздуха. Расстояние между пунктами A и B равно 900 км. Сколько времени затратит самолет на весь полет, если вдоль линии полета непрерывно дует ветер со скоростью 60 км/ч?

7. Шар массой 1,8 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы. В результате центрального, прямого и абсолютно упругого удара шар потерял 0,36 своей кинетической энергии. Определите массу большего шара.

8. В баллоне содержится газ при температуре 373 К. До какой температуры (по шкале Цельсия) нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза?

9. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя в три раза больше температуры холодильника. Нагреватель передал газу количество теплоты 42 кДж. Какую работу совершил газ?

10. Батарея гальванических элементов замкнута на внешнее сопротивление 10 Ом и дает ток 3 А. Если вместо этого сопротивления включить сопротивление 20 Ом, то ток станет равным 1,6 А. айдите ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

11. Пароход, двигаясь против течения реки со скоростью 14 км/ч относительно берега, проходит расстояние между двумя пристанями за 4 часа. За какое время он пройдет то же расстояние по течению, если его скорость относительно берега в этом случае равна 20,16 км/ч? Найдите скорость течения реки и скорость парохода в стоячей воде.

12. Свинцовый шар массой 500 г, движущийся со скоростью 10 м/с, соударяется с неподвижным шаром из воска, имеющим массу 200 г, после чего оба шара движутся вместе. Найдите кинетическую энергию шаров после соударения. Удар считайте центральным и прямым.

13. В цилиндр длиной 1,6 м, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении, начали медленно вдвигать поршень площадью 200 см^2. Определите силу давления газа, которая будет действовать на поршень, если его остановить на расстоянии 10 см от дна цилиндра.

14. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура холодильника равна 290 К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от 400 К до 600 К?

15. К батарейке с ЭДС 4,5 В и внутренним сопротивлением 1,0 Ом подключили резистор сопротивлением 8,0 Ом. Какой силы ток потечет в цепи? Чему равно напряжение на этом резисторе?

16. Ящик, имеющий массу 1 кг, подвешен на тросе длиной 2,5 м. Длина троса значительно больше линейных размеров ящика. Пуля массой 10 г летит в горизонтальном направлении, попадает в центр ящика и застревает в нем. Трос после попадания пули отклоняется на угол 60° от вертикали. Определите начальную скорость пули (перед ударом).

17. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы массами 1,5 кг и 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура следует пренебречь. g=9,81м/с^2.

18. При нагревании идеального газа на 1 К при постоянном давлении объем его увеличился на 1/350 первоначального объема. Найдите начальную температуру газа.

19. Атомарный азот массой 5 кг нагрет изохорически на 150 К. Найдите: 1) количество тепла, сообщенное газу; 2) изменение внутренней энергии; 3) совершенную газом работу. Молярная масса азота 0,028 кг/моль. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/ (К·моль).

20. Расстояние между двумя точечными зарядами 8 нКл и (–5,3) нКл равно 40 см. Вычислите напряженность поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Электрическая постоянная в законе Кулона: $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2

21. Два шара массами 0,2 кг и 0,8 кг подвешены на двух параллельных нитях длиной 2 м, касаясь друг друга. Меньший шар отводится на 90° от первоначального положения и отпускается. Найдите скорости шаров после центрального, прямого и абсолютно упругого столкновения.

22. Две гири массами 1 и 3 кг связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок. На сколько опустится более тяжелая гиря за первые 2 с движения, если гири отпустить? Массой блока и трением следует пренебречь.

23. Определите плотность насыщенного водяного пара в воздухе при температуре 300 К. Давление пара при этой температуре равно 3,55 кПа. Молярная масса водяного пара 0,018 кг/моль. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/ (К·моль).

24. При изохорическом нагревании атомарного кислорода объемом 50 л давление газа изменилось на 0,5 МПа. Найдите количество тепла, сообщенное газу. Молярная масса кислорода 0,032 кг/моль. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/ (К·моль).

25. Расстояние между двумя точечными зарядами 8 нКл и 5,3 нКл равно 40 см. Вычислите напряженность поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Электрическая постоянная в законе Кулона: $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2

Использованная литература

1. Математика: метод. Пособие по подготовке к олимпиадам школьников: 8 – 9-й классы / Т.Н. Сабурова, Ю.А. Дубнинский. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2016. – 62 с.

2. Решение уравнений в целых числах: учеб. пособие / Н.И. Латанова, А.П. Власова, Н.В. Евсеева. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 75 с.

3. Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.И. Математический анализ. Учебное пособие для IX–X классов средних школ с математической специализацией. М., Просвещение, 1969 г.

4. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001.

5. Исаков А.Я. Физика. Решение задач ЕГЭ − 2015. Часть 1: КамчатГТУ, 2014.

6. Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Механика твердого тела. Лекции. Издательство Физического факультета МГУ, 1997.

7. Образовательный портал Сколково «ЯКласс», http://www.yaklass.ru/

8. Открытый колледж «Физикон», http://www.physics.ru/

9. Единая коллекция Цифровых образовательных ресурсов, http://school-collection.edu.ru/

10. Подготовка к ЦТ (ЕГЭ), задачи по физике и математике, ttp://fizmat.by/

11. Астрофизический портал, http://www.afportal.ru/

12. Физический информационный портал http://phys-portal.ru/

13. Русаков А.В., Сухов В.Г. Сборник задач по физике (физико-математическая школа № 2, г. Сергиев Посад). 1998 г.

14. И.В. Яковлев Материалы по математике (Комбинаторика – олимпиаднику http://mathus.ru/math/kombinatorika.pdf

15. Портал «Сила знаний» http://ya-znau.ru/.

16. Долгов А.Н., Муравьев С.Е., Соболев Б.В. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике с решениями. Молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие / Под ред. С.Е. Муравьева. – М.: МИФИ, 2008. – 248 с.

17. А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Л.А. Мельников, В.Н. Шевцов Олимпиадные задачи по физике. – Москва- Ижевск, 2002.

18. Портал «Все о физике. Все для физики» http://fizportal.ru/

19. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004. – 258 с.

20. Белолипецкий С. Н., Еркович О. С. и др. Задачник по физике (физико-математический лицей при Московском техническом университете им. Н. Э. Баумана). 2005 г.

21. Белолипецкий С. Н. Олимпиадные задачи по физике для учащихся десятых классов: учеб. пособие / С. Н. Белолипецкий. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. – 46с.

22. А.В. Васильев. Физика. Оптика. Учебное пособие СПбГТУ. издательство СПбГТУ 1999. Пособие содежит примеры решения задач по всем разделам оптики.

23.Савельев И. В. Курс общей физики, т. 1. Механика. Молекулярная физика: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 432 с.

24. В.М. Полунин, Г.Т. Сычев, Физика. Конспект лекций по молекулярной физике и термодинамике для студентов инженерно-технических специальностей. Редактор О.А. Петрова – М: Издательско-полиграфический центр Курского государственного технического университета, 2001

25. «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень». Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова.

26. Лекции по физике http://physics-lectures.ru/category/molekulyarnaya-fizika-i-termodinamika/osnovy-termodinamiki/

27. Файловый архив студентов https://studfiles.net/

28. Социальная сеть работников образования https://nsportal.ru

29. Задачи вузов МГУ, МФТИ, НГУ, МИФИ, БГУ, БНТУ, БГУиР разных лет.

Рекомендуемая литература

1. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы / Агаханов Н.Х., Подлипскии О.К. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с

2. Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы / [Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А. и др. – М.: Просвещение, 2010. - 239 с.

3. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / [Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и др.]. - М.: Просвещение, 2008. - 192 с.

4. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Агаханов Н.Х,. Подлипскии О.К, [иод оощ. ред. Демидовой С.И., Колисниченко И.И. – М. : Просвещение, 2009. – 159 с.

5. Математика. Международные олимпиады / Агаханов Н.Х., Кожевников П.А., Терешин Д.А.. – М. : Просвещение, 2010. – 127 с.

6. Балаян Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задача по математике. 3-е изд. – Ростов н/Д : Феникс, 2008. - 364 с.

7. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика. – М.: Бюро Квантум, 2007. – 160 с.

8. Федоров Р.М., Капель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993-2005 г./ Под ред. В. М. Тихомирова. - М.: МЦНМО, 2006 – 456 с.

9. Шклярскин Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика. Алгебра. – М. ФИЗМ АТЛИТ, 2001 – 479 с.

10. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2012 года [сайт]. – http:olimpiads.mccme/ru/ommo/12/

11. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2013 года [сай г]. –http:olimpiads.mccme/ru/ommo /13/

12. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2014 года [сайт]. –http:olimpiads.mccme/ru/ommo /14/

13. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2012 года [сай г]. – http:olimpiads.mccme/ru/ommo /15/

14. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра, – М.: ФИЗМ АТЛИТ, 2007 - 454 с.

15. Шарыгин И.Ф., Кордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. – М.: Астрель • АСТ, 2001 - 397 с.

16. Бабинская И.П. Задачи математических олимпиад. - М. : Наука, 1973 –110 с.

17. Сборник задач по математике для поступающих 1 (с решениями). Алгебра. (7-е издание) Под редакцией М.И. Сканави – М.: «Высшая школа», 1994 – 526 с.

18. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре. 8-9 классы Учебное пособие для учащихся 8-9 классов с углубленным изучением математики. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 271 с.

19. Карп А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа. 10-11 классы – М.: Просвещение, 1995. – 176 с.

20. Звавич Л.И., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Алгебра. 9 класс. Задачник 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 336 с.

21. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Часть 2. Задачник: профильный уровень В 2-х частях. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с

22. Нагорнов О.В., Баскаков А.В. и др. Сборник задач по алгебре. Ч. 1-3. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства. В помощь учащимся 10-11-х классов – М.: НИЯУ МИФИ, 2009. – 156 с.

23. Шабунин М.И., Прокофьев А.А., Олейник Т.А., Соколова Т.В. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень. Задачник. 10-11 классы – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 477 с.

24. Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу Учебное пособие. – 2-е изд., исправ. – М.: МЦНМО, 2011. – 608 с.: ил.

25. Шахмейстер А.Х. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 1. Линейные функции и уравнения М.: МЦНМО; СПб.: Петроглиф: Виктория плюс, 2014. –176 с.

26. Шахмейстер А.Х. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 2. Нелинейные функции и уравнения. Часть 3. Графическое решение уравнений и систем уравнений с параметром СПб.: Петроглиф: Виктория плюс; М.: МЦНМО, 2016. – 392 с.

27. Шахмейстер А.Х. Дробно-рациональные неравенства Пособие для школьников, абитуриентов и преподавателей. – 3-е изд., исправ. и доп. – М.: МЦНМО; СПб.: Петроглиф: Виктория плюс, 2008. – 248 с.

28. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами на экзаменах 3-е изд., исправ. – М.: МЦНМО; СПб.: Петроглиф: Виктория плюс, 2009. – 248 с.

Учебное издание

Ческидов Василий Владимирович
Липина Александра Валерьевна
Мельниченко Илья Ашотович

Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников инженерной направленности

Техническое направление «МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА» 10–11-й классы

В авторской редакции

Подписано в печать 06.12.17	Бумага офсетная	Заказ
Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 4,1

Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (495) 638-45-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
тел. (499) 236-76-17, тел./факс (499) 236-76-35