МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Т.Н. Сабурова, Ю.А. Дубинский

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ПОДГОТОВКЕ К ОЛИМПИАДАМ ШКОЛЬНИКОВ

8–9-й классы

Рекомендовано редакционно-издательским советом

МИСиС

Москва 2016

УДК 51
С12

Сабурова Т.Н.

С12 Математика : метод. пособие по подготовке к олимпиадам школьников : 8–9-й классы / Т.Н. Сабурова, Ю.А. Дубинский. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2016. – 62 с.

Цель данного пособия – помочь школьникам эффективно подготовиться к олимпиадам по математике.

Пособие содержит примеры олимпиадных заданий с разбором, анализ их выполнения учащимися, а также справочные материалы, охватывающие все представленные на олимпиаде разделы математики.

Пособие предназначено для школьников 6–11 классов и для учителей математики. Материалы пособия могут быть использованы для подготовки к различным олимпиадам по математике, а также на уроках математики.

УДК 51

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из важнейших задач олимпиад для школьников является расширить кругозор, повысить уровень подготовки и развить интерес к науке. МИСиС проводит олимпиаду по математике для школьников 6–11 классов «МИСиС зажигает звезды», а также принимает активное участие в подготовке и проведении других олимпиад («Объединенная межвузовская математическая олимпиада» (ОММО), «Многофункциональная инженерная олимпиада «Звезда», включающая задачи по математике, и другие).

Накопленный опыт позволяет выделить наиболее часто встречающиеся категории олимпиадных задач. В силу ограниченности объема пособие не может охватить весь круг таких задач. В нем подробно с комментариями разбираются решения задач, относящихся к следующим семи темам: делимость целых чисел, многочлены, текстовые задачи, логические задачи, принцип Дирихле, элементы комбинаторики, планиметрия. Всего более полусотни задач. Кроме того, даются около восьмидесяти упражнений (с ответами) для самостоятельного решения. В пособие включены задачи из разных источников, среди них и задачи, которые были на олимпиаде «МИСиС зажигает звезды».

Надеемся, что это пособие принесет пользу не только школьникам 8 и 9 классов, но и всем интересующимся математикой.

Дорогие школьники! Ждем вас на олимпиаде «МИСиС зажигает звезды», а также на других олимпиадах, и желаем победы!

ВВЕДЕНИЕ

Исключительную роль математики ученые осознавали с самого зарождения науки. Особенно ярко эту мысль сформулировал знаменитый итальянский физик, механик, астроном и математик Галилео Галилей, считавший, что законы природы «написаны в грандиозной книге, которая открыта для всех и каждого, но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана, написана же она на математическом языке, а знаки ее – математические формулы», а великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс назвал математику царицей наук.

Заниматься математикой не только чрезвычайно интересно, но и полезно. Математика, как и прочие естественные науки, позволяет выработать четкость мышления и изложения; способность воспринимать новую информацию, что необходимо в любой последующей профессиональной деятельности; способствует развитию памяти и умению систематизировать полученные знания; обращаться к дополнительным источникам информации. Кроме всего прочего, математика воспитывает аккуратность и ответственность: при решении любой задачи стараться найти способ проверки полученного результата (за свой ответ к задаче «отвечать головой»).

Математические олимпиады призваны расширить кругозор школьников, повысить их уровень подготовки и развития, а также заинтересовать предметом. Они дают возможность попробовать свои силы при решении стандартных и нестандартных задач в непривычной обстановке, в этом плане они помогают и в подготовке к сдаче ОГЭ.

Олимпиады позволяют более ярко обозначить интерес школьника к тому или иному предмету и дать возможность раскрыть свой талант.

Чтобы успешно справляться с олимпиадными задачами, конечно, нужно хорошо владеть материалом школьной программы. Кроме того, олимпиадные задачи иногда требуют и некоторых дополнительных сведений по элементарной математике. Также необходимо умение грамотно с точки зрения логики проводить рассуждения и доказательства.

Приведем краткий перечень вопросов, на которые следует обратить внимание при подготовке к олимпиаде.

1. Признаки делимости натуральных чисел, отыскание наибольшего общего делителя с помощью алгоритма Евклида.

2. Принцип Дирихле (если по n ящикам раскладывают $n + 1$ и более шаров, то, по крайней мере, в одном из ящиков будет не менее 2 шаров).

3. Отыскание рациональных корней многочлена с рациональными коэффициентами; обобщенная теорема Виета, многочлены с симметрично расположенными коэффициентами, деление многочлена на многочлен, отыскание наибольшего общего делителя двух многочленов с помощью алгоритма Евклида.

4. Решение линейных и нелинейных уравнений и неравенств с параметрами, а также уравнений и неравенств в целых числах.

5. Решение систем линейных и нелинейных уравнений и неравенств с двумя и тремя неизвестными. Решение линейных и нелинейных систем уравнений и неравенств с двумя и тремя неизвестными, содержащих параметр.

6. Решение текстовых задач, в том числе на проценты, а также текстовые задачи, которые решаются в целых числах.

7. Задачи по алгебре и геометрии на доказательство.

8. Упрощающие решения задач теоремы и неравенства, например, «среднее геометрическое положительных чисел не превосходит их среднего арифметического».

9. Различные задачи по геометрии, в том числе задачи на построение. Задачи с использованием аналитической геометрии.

10. Логические задачи.

11. Комбинаторные задачи.

12. Задачи по теории вероятностей (классическая модель).

В силу ограниченности объема пособия, мы рассмотрим только задачи, относящиеся к следующим семи темам: делимость целых чисел, многочлены, текстовые задачи, логические задачи, принцип Дирихле, элементы комбинаторики, планиметрия. По каждой из этих тем сначала разбираются решения задач с подробным обсуждением методов их решения, а затем приводятся упражнения (с ответами) для самостоятельного решения.

Мы надеемся, что это пособие позволит вам расширить знания по математике и о математиках, а также станет полезным подспорьем в подготовке к олимпиадам и успешной сдаче ОГЭ.

1. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В этом разделе мы рассмотрим задачи, которые связаны с делимостью целых чисел и некоторые другие вопросы, связанные с целыми числами.

Во всем разделе, если не оговорено противное, будем рассматривать только целые числа

Напомним, что целое число называется простым, если оно делится только на единицу и самого себя, при этом по некоторым соображениям 1 не считается простым числом. Известно, что любое целое число раскладывается на множители, каждый из которых представляет собой простое число. Если произведение двух целых чисел делится на простое число, то, по крайней мере, одно из них делится на это число. Если m, n, k, r целые неотрицательные числа и $n = mk + r$, где $0 \le r \le m-1$, то число r называется остатком от деления n на m. Заметим, что при делении на m различных остатков ровно m: $0, 1, 2, 3, ..., m-1$ и, если взять подряд m натуральных чисел, то одно из них делится на m.

Задача 1.1. Докажите, что для любого натурального n число $n^5 - n$ делится на 5.

Доказательство.

1) Разложим это число на множители $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1) \times$ $\times (n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$. Если само n делится на 5, то, очевидно, данное число делится на 5. Если же n не делится на 5, то остатки при делении n на 5 могут быть 1, 2, 3, 4.

2) Если этот остаток равен 1, то, $n-1$ делится на 5.

3) Если остаток равен 2, то $n = 5k + 2$, следовательно, $n^2 = 25k^2 + 20k + 4$ и $n^2 + 1$ делится на 5, и, учитывая пункт 1), данное число делится на 5. Аналогичная ситуация, если остаток равен 3.

4) Если же остаток равен 4, то $n + 1$ делится на 5, то есть и в этом случае $n^5 - n$ тоже делится на 5.

Упражнение 1.1. Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 3.

Упражнение 1.2. Докажите, что, если m и n – целые и $n^2 + m^2$ делится на 3, то числа m и n тоже делятся на 3.

Задача 1.2. Найдите последнюю цифру числа 52^{2018}.

Решение.

1) Рассмотрим последнюю цифру степеней числа 52: 52^1 – 2, 52^2 – 4, 52^3 – 8, 52^4 – 6; 52^5 – 2. Таким образом, последние цифры периодически повторяются.

2) Рассмотрим показатель степени 2018. Это число можно представить в виде $2018 = 2 + 2016 = 2 + 4 \cdot 504$.

3) Поскольку 52^4 оканчивается на 6, то и число $(52^4)^{504} = 52^{4\cdot 504} = 52^{2016}$ тоже оканчивается на 6.

4) Тогда данное число $52^{2018} = 52^{2016+2} = 52^{2016} \cdot 52^2$. Здесь первый множитель оканчивается на 6, а второй на 4, следовательно, их произведение оканчивается на 4.

Ответ: 4.

Задача 1.3. Найдите последнюю цифру числа $13^{(12^{11})}$.

Решение.

1) Рассмотрим последнюю цифру степеней числа 13: 13^1 – 3, 13^2 – 9, 13^3 – 7, 13^4 – 1, 13^5 – 3. Таким образом, последние цифры периодически повторяются.

2) Рассмотрим теперь показатель 12^{11} – это число кратно 4, то есть $12^{11} = 4 \cdot k$.

3) Из пунктов 1) и 2) следует, что последняя цифра данного числа будет такая же, как и у числа 13^4. Таким образом, последняя цифра числа $13^{(12^{11})}$ будет 1.

Ответ: 1.

Упражнение.1.3. Найдите последнюю цифру числа 23^{2017}.

Упражнение 1.4. Найдите последнюю цифру числа 437^{2014}.

Упражнение 1.5. Найдите последнюю цифру числа 124^{3020}..

Упражнение 1.6. Найдите последнюю цифру числа 123^{2015}..

Упражнение 1.7. Найдите последнюю цифру числа 142^{2013}.

Задача 1.4. Найдите все двузначные числа, у которых сумма цифр после умножения на 3 не меняется.

Решение.

Если число n умножили на 3, то сумма цифр числа $3n$ делится на 3, но она такая же, как у n, следовательно, сумма цифр самого числа n делится на 3 и число n делится на 3. Тогда при умножении на 3 получится, что число $3n$ делится на 9, и его сумма цифр делится на 9, а значит, сумма цифр и самого числа n делится на 9, то есть n кратно 9. Выпишем такие двузначные числа 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99 кратные 9. Посмотрим, какие из них удовлетворяют условию задачи. Для этого рассмотрим табл. 1.1.

Таблица 1.1

Таблица, содержащая сумму цифр чисел *n* и 3*n*

n	Сумма цифр *n*	3*n*	Сумма цифр 3*n*
18	9	54	9
27	9	81	9
36	9	108	9
45	9	135	9
54	9	162	9
63	9	189	18
72	9	216	9
81	9	243	9
90	9	270	9
99	18	297	18

Из табл. 1.1 видно, что сумма цифр изменилась только у числа 63.
Ответ: 18, 27, 36, 45, 54, 72, 81, 90, 99.

Замечание 1.1. При решении этой задачи мы использовали признаки делимости на 3 и на 9 (сумма цифр делится на 3 и 9 соответственно). Полезно также помнить признаки делимости на 4 (2 последние цифры образуют двузначное число, которое делится на 4, например, 3125616 делится на 4, а 3125674 не делится), признак делимости на 5 (последняя цифра 0 или 5), признак делимости на 11 (сумма цифр, стоящих на четных местах равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, иными словами, альтернированная сумма цифр равна нулю, например, число 2574 делится на 11: $2+7=5+4$, или $2-5+7-4=0$).

Перейдем теперь к вопросу отыскания наибольшего общего делителя двух чисел. Отметим, что *наибольший общий делитель* d целых чисел m и n обладает тем свойством, что он сам делится на любой общий делитель чисел m и n. Это свойство целиком характеризует наибольший общий делитель в том смысле, что его можно было бы взять в качестве определения наибольшего общего делителя.

Найти наибольший общий делитель можно используя, например, разложение чисел на простые множители, но есть и другой способ – алгоритм Евклида. Суть этого метода проиллюстрируем на конкретном примере.

Задача 1.5. Найдите наибольший общий делитель чисел 917 и 133.

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида.

$$\begin{aligned}
917 &= 133 \cdot 6 + 119 \\
133 &= 119 \cdot 1 + 14 \\
119 &= 14 \cdot 8 + 7 \\
14 &= 7 \cdot 2
\end{aligned}\;:$$

Поднимаясь снизу вверх, мы получим, что 119 делится на 7; 133 делится на 7, следовательно, и 917 делится на 7. Нетрудно видеть, что другой общий делитель 917 и 133 должен был бы быть делителем и 7, но 7 простое число, Значит, это и есть наибольший общий делитель.

*Ответ:*7.

Замечание 1.2. В процессе решения мы получили еще один полезный результат. Поднимаясь снизу вверх, получится, что $7 = 9 \cdot 917 - 62 \cdot 133$, т.е. для любых натуральных чисел m и n и их наибольшего общего делителя d найдутся такие целые числа x и y, что $mx + ny = d$. В частности, если m и $n-$ взаимно простые числа, то существуют такие целые числа x и y, что $mx + ny = 1$. Причем, очевидно, такое представление не единственное, так как к этому равенству можно добавлять сумму $mq + np = 0$, где p, например, равно $-m$, а $q = n$, то есть $mn + (-m)n = 0$.

Упражнение 1.8. Найдите наибольший общий делитель чисел 1584 и 770.

Упражнение 1.9. Найдите наибольший общий делитель чисел 5236 и 5967.

Обратимся теперь к решению уравнений в целых числах.

Задача 1.6. Решите в целых числах уравнение $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Решение.

1) Перепишем уравнение в виде $6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$ или $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$.

2) Из предыдущего пункта следует, что $x^2 - 4 = 5u$ и $10 - y^2 = 6v$. Таким образом, $6 \cdot 5 \cdot u = 5 \cdot 6 \cdot v$, следовательно, $u = v$.

3) Перепишем уравнение $x^2 - 4 = 5u$ в виде $u + 4/5 = x^2/5$. Отсюда видно, что $u + 4/5 \ge 0$ и значит $u \ge -4/5$.

4) С другой стороны, так как $u = v$, то из уравнения $10 - y^2 = 6u$ получим, что $5/3 - u = y^2/6$ и значит $u \le 5/3$.

5) Итак, $-4/5 \le u \le 5/3$. Но u – целое, а в этом промежутке 2 целых числа: 0 и 1.

6) Если $v = u = 0 = (10 - y^{2)})/6$, тогда целое $y^2 = 10$, что неверно.

7) Если $u = v = 1$, то $x = \pm 3$ и $y = \pm 2$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -2 \end{cases}; \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = 2 \end{cases}; \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = -2 \end{cases}.$

Задача 1.7. Решите в целых числах уравнение

$$(x + 2y - 1)(x - y + 4) = 5.$$

Решение.

1) Так как 5 – простое число, то возможны 4 варианта: $\begin{cases} x + 2y - 1 = 1 \\ x - y + 4 = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} x + 2y - 1 = -1 \\ x - y + 4 = -5 \end{cases}$, $\begin{cases} x + 2y - 1 = 5 \\ x - y + 4 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + 2y - 1 = -5 \\ x - y + 4 = -1 \end{cases}$.

2) Для первой системы $\begin{cases} x + 2y - 1 = 1 \\ x - y + 4 = 5 \end{cases}$, вычитая из первого уравнения второе, получим, что $3y - 5 = -4$ – нет целых решений.

3) Аналогично для второй системы $\begin{cases} x + 2y - 1 = -1 \\ x - y + 4 = -5 \end{cases}$, вычитая из первого уравнения второе, получим, что $3y - 5 = 4$ откуда $y = 3$ и $x = -6$.

4) Для третьей системы $\begin{cases} x + 2y - 1 = 5 \\ x - y + 4 = 1 \end{cases}$, вычитая из первого уравнения второе, получим, что $3y - 5 = 4$, откуда $y = 3$ и $x = 0$.

5) Наконец, для четвертой системы $\begin{cases} x + 2y - 1 = -5 \\ x - y + 4 = -1 \end{cases}$, вычитая из первого уравнения второе, получим, что $3y - 5 = -4$ – нет целых решений.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 3 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = -6 \\ y_2 = 3 \end{cases}.$

Задача 1.8. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{cases}.$$

Решение.

1) Возведем первое уравнение в квадрат: $(x+y)^2=4$ или $x^2+2xy+y^2=4$

и вычтем из него второе уравнение, умноженное на 4: $x^2+2xy+y^2-4xy+4z^2=0$.

Получим $x^2+y^2-2xy+4z^2=0$, или $(x-y)^2+4z^2=0$.

2) Из последнего равенства следует, что $x-y=0$ и $z=0$.

3) Учитывая первое уравнение системы, находим, что $x=1, y=1$.

Ответ: $x=1; y=1; z=0$.

Упражнение 1.10. Решите в целых числах уравнение $xy=x+y$.

Упражнение 1.11. Решите в целых числах уравнение:

$$(2x-y+4)(x-3y-1)+7=0.$$

В заключение приведем историю Большой теоремы Ферма, которая весьма интересна, а также доказательство Малой теоремы Ферма.

Пьер Ферма – замечательный французский математик, жил в 17 веке. По профессии он был юристом, но на досуге изучал математику, увлекался исследованиями проблем в области теории чисел, алгебры, геометрии и теории вероятностей. Его результаты внесли крупный вклад в развитие этих разделов математики. Он считается основателем современной теории чисел. Однако Ферма не был профессиональным математиком, о его открытиях стало известно благодаря его переписке с Рене Декартом, Блезом Паскалем и другими математиками. Формулировки некоторых теорем Ферма писал на полях книги «Арифметика» Диофанта. В том числе формулировку теоремы, которую впоследствии называли Большой, или Великой, теоремой Ферма. Утверждение этой теоремы состоит в следующем: уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет целых положительных решений при любом натуральном $n>2$. Формулировку этой теоремы Ферма сопроводил замечанием: «Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но поля здесь слишком узки для того, чтобы вместить его». Все утверждения, которые формулировал Ферма, со временем подтверждались, но не эта теорема. Простота ее формулировки, а также замечание самого Ферма создавали иллюзию простоты и ее доказательства. Поэтому доказать это утверждение пытались не только многие математики Европы, но и просто любители математики. Интерес к этой проблеме был подогрет последующими событиями.

В 1907 году богатый немецкий промышленник Пауль Вольфскель из-за неразделённой любви решил свести счёты с жизнью. Со свойственной немцам пунктуальностью он назначил дату и время самоубийства: ровно в 12 часов ночи. В назначенный день он составил завещание и написал письма друзьям и родственникам. Оказалось, что дела закончились раньше полуночи. Поскольку Вольфскель интересовался математикой, то от нечего делать он стал читать статью немецкого математика Куммера. Неожиданно ему показалось, что Куммер в ходе рассуждений допустил неточность. Пауль стал разбирать это место статьи. Полночь миновала, наступило утро. Пробел в доказательстве был восполнен, а повод для самоубийства в утреннем свете выглядел совершенно нелепо. Пауль разорвал написанные накануне прощальные письма и переписал завещание. Вскоре он умер естественной смертью. Вскрыв завещание, наследники были весьма поражены: 100000 марок (более одного миллиона нынешних фунтов стерлингов) передавались на счёт Королевского научного общества Гёттингена, которое в том же году объявило о проведении конкурса на соискание премии Вольфскеля: За доказательство теоремы Ферма присуждалась премия в размере100 000 марок. За опровержение теоремы ничего не полагалось.

Большинство профессиональных математиков считали поиск доказательства Великой теоремы Ферма безнадёжным делом и не хотели тратить время на такое бесполезное занятие. Зато любители с энтузиазмом взялись за ее доказательство, надеясь заполучить и деньги и славу. Через несколько недель после объявления на Гёттингенский университет и на другие научные центры Европы обрушился поток «доказательств». Писали парикмахеры, торговцы фруктами, школьники и прочие. Стали создаваться специальные центры по рассмотрению этих писем. В России такой центр был создан при институте математики Академии Наук. С течением времени деньги, оставленные Вольфскелем, обесценились, но интерес к проблеме продолжал будоражить и любителей математики, и профессионалов. Попытки использовать вычислительную технику для опровержения теоремы к успеху не привели. Нельзя сказать, что попытки доказать эту теорему учеными были совсем бесплодными. Попутно были получены новые важные результаты.

Эта история, начавшаяся в 17 веке, завершилась только в конце 20 века: В 1994 году английский математик Джон Уайлс нашел и продемонстрировал доказательство Большой теоремы Ферма.

Что касается Малой теоремы Ферма, то она достаточно простая, но играет важную роль в теории чисел.

Малая теорема Ферма: Если p – простое натуральное число, то при любом натуральном a число $a^p - a$ делится на p.

Доказательство.

1) Если a делится на p, то и $a^p - a$ делится на p.

2) Если a не делится на p, то рассмотрим числа: $a; 2a; 3a; ...; (p-1)a$.

3) Заметим, что при любом $k = 1, 2, 3, ..., (p-1)$ число ka не делится на p, так как p- простое и a не делится на p. Поэтому $ka = m_k p + r_k$, где r_k – остаток от деления на p.

4) Рассмотрим разность двух таких чисел: $k_2 a - k_1 a = (k_2 - k_1)a$ при $k_2 > k_1$. Она не может делиться на p, так как p простое. Отсюда следует, что все остатки от деления этих чисел на p различны и произведение этих чисел $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a$ будет равно с одной стороны $a^{p-1}(p-1)!$, а с другой стороны $M + (p-1)!$, где M – некоторое число, кратное p. Таким образом, $a^{p-1}(p-1)! = M + (p-1)!$.

5) Из этого равенства немедленно получаем: $(a^P - a)(p-1)! = Ma$. Так как правая часть делится на p, а $(p-1)!$ на p не делится, то $a^p - a$ делится на p

Заметим, что из этой теоремы немедленно получается результат задачи 1.1.

2. МНОГОЧЛЕНЫ

В этом разделе мы рассмотрим задачи, связанные с разложением многочленов на множители. В частности отыскание корней уравнения.

Напомним ряд важных теорем, связанных с многочленами.

1) Теорема французского математика Безу: если число a – корень многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен делится на $(x-a)$, то есть. $P_n(x)=(x-a)\cdot Q_{n-1}(x)$. Причем, если $P_n(x)=(x-a)^k Q_{n-k}(x)$ и $Q_{n-k}(a)\neq 0$, то k называется *кратностью корня* a. Если кратность $k=1$, то корень называется простым, а если $k\geq 2$, то корень называется кратным.

2) Основная теорема алгебры: всякий многочлен степени n имеет n комплексных корней, при этом каждый корень засчитывается столько раз, какова его кратность.

3) Многочлен с действительными коэффициентами нечетной степени всегда имеет, по крайней мере, один действительный корень.

4) Многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение так называемых неприводимых множителей, то есть, линейных множителей вида $(x-a)$ и множителей, представляющих собой квадратный трехчлен вида (x^2+px+q), у которого нет действительных корней (здесь мы предполагаем, что a,p,q – действительные числа и что у многочлена коэффициент при старшей степени равен единице).

Задача 2.1. Разложите многочлен x^4+1 на неприводимые множители.

Решение.

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

Ответ: $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x-1)(x^2-\sqrt{2}x-1)$.

Легко убедиться, что, если дан многочлен с целыми коэффициентами, то рациональное число $\dfrac{p}{q}$ будет его корнем в том и только в том случае, когда p является делителем свободного члена, а q является делителем коэффициента при старшей степени x. В частности, если коэффициент при старшей степени равен 1, то рациональные корни могут быть только целыми (делителями свободного члена).

Задача 2.2. Разложите на неприводимые множители многочлен $x^3 + 3x^2 + 4x + 4$.

Решение.

1) Согласно сказанному выше, рациональные корни такого многочлена могут быть только целыми и являются делителями 4: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$. Непосредственно подставляя в многочлен, убеждаемся, что –2 является его корнем.

2) По теореме Безу, тогда $x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x+2) \cdot Q_2(x)$.

3) Чтобы найти коэффициенты многочлена второй степени $Q_2(x) = x^2 + ax + b$ можно либо поделить данный многочлен на $(x-2)$ (что тоже надо уметь), либо воспользоваться обобщенной теоремой Виета, из которой следует, что если дан многочлен степени n и коэффициент при старшей степени равен 1, то коэффициент при x^{n-1} равняется сумме корней с противоположным знаком, а произведение корней, умноженное на $(-1)^n$, равно свободному члену. Таким образом, в нашем случае $-3 = x_1 + x_2 + (-2)$ и $x_1 + x_2 = -1$, а $x_1 \cdot x_2 \cdot (-2) \cdot (-1)^3 = 4$ и $x_1 \cdot x_2 = 2$. Отсюда следует, что $Q_2(x) = x^2 + x + 2$.

4) Заметим, что $Q_2(x)$ не имеет действительных корней, следовательно, мы получили разложение данного многочлена на неприводимые множители.

Ответ: $x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x+2) \cdot (x^2 + x + 2)$.

Задача 2.3. Разложите на неприводимые множители многочлен $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Решение.

1) Заметим, что это сумма членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен x. Следовательно,

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^6 - 1}{x - 1}.$$

2) Раскладываем числитель на множители как разность квадратов, а затем как сумму и разность кубов:

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1).$$

3) Сокращаем дробь $\frac{x^6 - 1}{x - 1}$ на $x - 1$ и получаем, что

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Ответ: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Упражнение 2.1. Разложите на неприводимые множители многочлен x^3+5x^2+3x-9.

Упражнение 2.2. Разложите на неприводимые множители многочлен $x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

Задача 2.4. Решите уравнение $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$.

Решение.

1) Эта задача сродни предыдущим. Специфика данного уравнения состоит в том, что многочлен, стоящий в левой части, является симметрическим (равны коэффициенты, равноотстоящие от концов). Такой многочлен нечетной степени всегда имеет корень $x=-1$. Таким образом, данный многочлен можно разложить на множители $(x+1)Q_4(x)$.

2) Чтобы найти $Q_4(x)$, поделим наш многочлен на $(x+1)$. При этом получится, что $Q_4(x)$ снова симметрический многочлен: $Q_4(x)=2x^4+x^3-6x^2+x+2$.

3) Поскольку 0 не является корнем этого многочлена, поделим на «центральную» степень x, то есть на x^2, и сгруппируем слагаемые. Получим: $2(x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})-6$.

4) В уравнении $2(x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})-6=0$ делаем замену: $t=x+\frac{1}{x}$, тогда $t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ и получится квадратное уравнение $2(t^2-2)+t-6=0$ или $2t^2+t-10=0$, откуда $t_1=2, t_2=-\frac{5}{2}$.

5) Рассмотрим первый случай: $x+\frac{1}{x}=2$, или $x^2-2x+1=0$. Это уравнение имеет единственное решение $x=1$ (корень многочлена кратности 2).

6) Во втором случае $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$, или $2x^2+5x+2=0$, откуда $x_1=-2, x_2=-\frac{1}{2}$.

7) Таким образом, уравнение $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$ имеет корни

$$x_1=-2, x_2=-\frac{1}{2},\ x_{3,4}=1.$$

Ответ: $x_1=-2, x_2=-\frac{1}{2},\ x_{3,4}=1,\ x_5=-1$.

Замечание 2.1. Поскольку в предыдущей задаче мы нашли корни многочлена, то его можно разложить на неприводимые множители: $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=2(x+1)(x-1)(x-1)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$, или $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=(x+1)(x-1)(x-1)(x+2)(2x+1)$.

Упражнение 2.3. Разложите многочлен на неприводимые множители: $3x^4+10x^3+6x^2+10x+3$.

Упражнение 2.4. Разложите многочлен на неприводимые множители: $3x^4+4x^3-14x^2+4x+3$.

Упражнение 2.5. Решите уравнение: $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$.

Замечание 2.2. При решении рациональных неравенств, например, неравенств вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\le 0$ необходимо знать наибольший общий делитель данных двух многочленов. Его всегда можно найти, используя алгоритм Евклида.

Рассмотрим теперь однородный многочлен $P(u,v)=au^2+buv+cv^2$, где u,v – переменные, a,b,c – постоянные. Этот многочлен замечателен тем, что $P(ku,kv)=ak^2u^2+bkukv+ck^2v^2=k^2(au^2+buv+cv^2)$, то есть $P(ku,kv)=k^2P(u,v)$. Отсюда следует, что уравнение $au^2+buv+cv^2=0$ можно переписать в виде $a(u/v)^2+b(u/v)+c=0$ (если $v\ne 0$) и, положив $u/v=t$, получим квадратное уравнение: $at^2+bt+c=0$

Задача 2.5. Решите уравнение: $(x+1)^4+(x^2-x-2)^2=20(x-2)^4$.

Решение.

1) Заметим, что $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$, следовательно, мы имеем дело с однородным многочленом. Достаточно положить $u=(x+1)^2$, $v=(x-2)^2$ и переписать уравнение в виде: $u^2+uv-20v^2=0$.

2) При этом, если $v=0$, то из уравнения следует, что и $u=0$, но в нашем случае этого не может быть, поэтому можно смело делить на

v. Положив $t = u / v > 0$, получим $t^2 + t - 20 = 0$. Значит, $t_1 = -5, t_2 = 4$. Первый из этих корней не подходит, так как $t > 0$.

3) Если $t = 4$, то $\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)^2} = 4$, откуда получаем $\dfrac{x+1}{x-2} = 2$ и $x = 5$, или $\dfrac{x+1}{x-2} = -2$ и $x = 1$.

Ответ: $x_1 = 5; x_2 = 1$.

Задача 2.6. Решите уравнение:

$$(x-1)^4 + 5(x^2 - 5x + 4)^2 = 36(x-4)^4.$$

Решение. Это уравнение, по сути, такое же, как и предыдущее.

1) Положим $u = (x-1)^2, v = (x-4)^2$ и перепишем уравнение в виде: $u^2 + 5uv - 36v^2 = 0$. Положив $t = u / v > 0$, получим $t^2 + 5t - 36 = 0$. Значит, $t_1 = -9, t_2 = 4$. Первый из этих корней не подходит, так как $t \geq 0$.

2) Если $t = 4$, то $\dfrac{(x-1)^2}{(x-4)^2} = 4$, откуда получаем $\dfrac{x-1}{x-4} = 2$ и $x = 7$, или $\dfrac{x-1}{x-4} = -2$ и $x = 3$.

Ответ: $x_1 = 7; x_2 = 3$.

Задача 2.7. Решите уравнение:

$$42x^2 - 13x(x^2 - x + 12) + (x^2 - x + 12)^2 = 0.$$

Решение. Это уравнение тоже, по сути, такое же, как и предыдущие.

1) Положим $u = x, v = (x^2 - x + 12)$ и перепишем уравнение в виде: $42u^2 - 13uv + v^2 = 0$. Положив $t = u / v$, получим $42t^2 - 13t + 1 = 0$. Значит, $t_1 = \dfrac{1}{6}, t_2 = \dfrac{1}{7}$.

В данном случае нужно рассматривать оба корня.

2) Если $t = \dfrac{1}{6}$, то $\dfrac{x}{x^2 - x + 12} = \dfrac{1}{6}$, откуда получаем $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x = 3$ и $x = 4$.

3) Если же $t=\frac{1}{7}$, то $\frac{x}{x^2-x+12}=\frac{1}{7}$, откуда получаем $x^2-8x+12=0$, $x=2$ и $x=6$.

Ответ: $x_1=3$; $x_2=4$; $x_3=2$; $x_4=6$.

Упражнение 2.6. Решите уравнение:

$$(x+3)^4-7(x^2+10x+21)^2=18(x+7)^4.$$

Упражнение 2.7. Решите уравнение:

$$(x-4)^4+4(5x^2-28x+32)^2=5(5x-8)^4.$$

Упражнение 2.8. Решите уравнение:

$$(x+6)^4-13(x^2-3x-54)^2=48(x-9)^4.$$

Упражнение 2.9. Решите уравнение:

$$(x+2)^4-4(x^2+8x+12)^2=45(x+6)^4.$$

Упражнение 2.10. Решите уравнение:

$$(x-1)^4+7(5x^2+2x-7)^2=8(5x+7)^4.$$

Упражнение 2.11. Решите уравнение:

$$(x+8)^4-11(x^2+x-56)^2=80(x-7)^4.$$

Упражнение 2.12. Решите уравнение:

$$32x^2-12x(x^2+3x-6)+(x^2+3x-6)^2=0.$$

Упражнение 2.13. Решите уравнение:

$$4x^2+5x(x^2+5x+8)+(x^2+5x+8)^2=0.$$

Упражнение 2.14. Решите уравнение:

$$5x^2=4x(x^2+4x-10)+(x^2+4x-10)^2.$$

В этом разделе мы рассмотрели лишь наиболее простые методы отыскания корней многочлена. Более полное изложение этого вопроса можно найти в соответствующей литературе.

3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Решение любой текстовой задачи сводится к тому, что мы составляем уравнения или неравенства, относительно величин, которые требуется найти. Затем решаем эти уравнения или неравенства и анализируем полученные результаты с учетом реального смысла неизвестных величин.

Тематика текстовых задач необычайно широка. Чаще всего встречаются следующие типы текстовых задач.

1) *Задачи на движение.* Если движение равномерное, а именно такая ситуация обычно и рассматривается, и S – расстояние, V – скорость, t – время, то $S = Vt$. Причем важно, чтобы соответствующие величины измерялись в одних и тех же единицах, например, время только в часах или только в минутах.

2) *Задачи на работу.* В этих задачах, как правило, весь объем работы считают равным единице, тогда производительность равна $\frac{1}{t}$, где t – время, затраченное на выполнение этой работы.

3) *Задачи на проценты.* Если смесь в количестве a содержит количество b некоторого вещества, то процентное содержание этого вещества равно $\frac{b}{a}100$ %. Как правило, такие задачи решают, подсчитывая баланс какого-либо компонента.

4) *Текстовые задачи, которые решаются в целых числах*.

3.1. Задачи на движение

Задача 3.1. Пункт B расположен на расстоянии 200 км к югу от пункта A. Из пункта A на север вылетел со скоростью 720 км/час первый самолет, а через 10 минут тоже на север из пункта B вылетел второй самолет со скоростью 1080 км/час. Через какое время после вылета первого самолета второй самолет опередит его на 270 км?

Решение.

1) Пусть время, через которое второй самолет опередит первый на 270 км, равно t часов. Тогда первый самолет пролетит за это время $720t$ км.

2) Второй самолет будет лететь на 10 мин = 1/6 часа (важно, чтобы все измерялось в одних и тех же единицах) меньше, но пролетит на 270 км больше, чем первый.

3) Таким образом, $1080\ (t-1/6)=\ 720t+270$.

4) Решая это уравнение, найдем, что t=5/4, т.е. 1 час и 15 минут.

Ответ: 1 час 15 минут.

Задача 3.2. Из пункта A с постоянной скоростью выехал мотоциклист, одновременно навстречу ему из пункта B тоже с постоянной скоростью выехал велосипедист. Они встретились на расстоянии 3,2 км от пункта B, а в момент прибытия мотоциклиста в пункт B велосипедист находился на расстоянии 12 км от пункта A. Найдите расстояние между пунктами A и B.

Решение.

1) Пусть S – расстояние между пунктами A и B, V_1 – скорость велосипедиста, а V_2 – скорость мотоциклиста.

2) До встречи мотоциклист проехал ($S-3{,}2$) км, а велосипедист – 3,2 км, поэтому, $\dfrac{3{,}2}{V_1}=\dfrac{S-3{,}2}{V_2}$, откуда $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{S-3{,}2}{3{,}2}$.

3) Когда мотоциклист проехал весь путь S, велосипедист проехал $S-12$ км, поэтому $\dfrac{S-12}{V_1}=\dfrac{S}{V_2}$, откуда $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{S}{S-12}$.

4) С учетом пунктов 2) и 3) получим, что $\dfrac{S-3{,}2}{3{,}2}=\dfrac{S}{S-12}$, или $S^2-18{,}4S+38{,}4=0$. Это квадратное уравнение имеет 2 решения: 16 и 2,4.

5) По смыслу задачи $S>12$, поэтому остается решение – 16. Итак, расстояние между пунктами A и B равно 16 км.

Ответ: 16 км.

Задача 3.3. Пловец плывет против течения реки (с постоянной скоростью) и встречает плывущую по течению пустую лодку. После этого он продолжает плыть еще 15 минут, а затем поворачивает назад и догоняет лодку на расстоянии 350 метров от места встречи. Найдите скорость течения реки (в км/час).

Решение.

1) Обозначим скорость течения реки V_1, а собственную скорость пловца (скорость в стоячей воде) – V_2 и переведем метры в километры: 350 м = 0,35 км, а минуты – в часы: 15 мин = 1/4 час.

2) Пловец после встречи с лодкой, со скоростью V_2-V_1 проплыл против течения реки расстояние, равное $(V_2-V_1)\cdot(1/4)$, а затем со

скоростью V_2+V_1 по течению расстояние, равное $(V_2-V_1)/4+0{,}35$. Таким образом, пловец всего плыл $1/4+\dfrac{(V_2-V_1)/4+0{,}35}{V_1+V_2}$ часа.

3) За это же время лодка проплыла 0,35 км со скоростью, равной скорости течения реки V_1.

4) Принимая во внимание результаты пунктов 2) и 3), получим уравнение: $1/4+\dfrac{(V_2-V_1)/4+0{,}35}{V_1+V_2}=\dfrac{0{,}35}{V_1}$.

5) Упрощая это уравнение, мы получим, что $V_1=0{,}7$.

Ответ: 0,7 км/ч.

Упражнение 3.1. Из пункта A в пункт B со скоростью 3,6 км/ч вышел пешеход, а через 1 час и 15 минут навстречу ему из пункта B в пункт A вышел второй пешеход со скоростью 4,8 км/ч. Найдите расстояние между пунктами A и B, если оба пешехода прибыли в конечные пункты одновременно.

Упражнение 3.2. Пароход за 10 часов прошел 110 км по течению реки и 70 км против течения. В другой раз, за такое же время он прошел 88 км по течению и 84 км против течения реки. Найдите скорость парохода в стоячей воде (в км/час).

Упражнение 3.3. Из пункта A по реке отправляется плот. Через час из пункта A вниз по течению отправляется катер. Найдите, сколько времени (в часах) потребуется катеру, чтобы догнать плот и возвратиться обратно в пункт A, если скорость катера в стоячей воде в 2 раза больше скорости течения реки.

Упражнение 3.4. Пловец плывет против течения реки (с постоянной скоростью) и встречает плывущую по течению пустую лодку. После этого он продолжает плыть еще 5 минут, а затем поворачивает назад и догоняет лодку на расстоянии 200 метров от места встречи. Найдите скорость течения реки (в км/час).

Упражнение 3.5..Расстояние между двумя городами по реке 80 км. Моторная лодка, двигаясь по течению, тратит на этот путь на 1 час меньше, чем двигаясь против течения. Скорость течения реки 2 км/час. Найдите скорость лодки (в км/час) в стоячей воде.

3.2. Задачи на работу

Задача 3.4. Два мастера, работая вместе, могут выполнить всю работу за 10 дней. Если первый мастер один проработает 7 дней, то оставшуюся часть работы второй мастер может выполнить один за 16 дней. За сколько дней может выполнить всю работу один первый мастер?

Решение.

1) Пусть производительность первого мастера равна x, а второго – y. Тогда $10(x+y)=1$ (всю работу принимаем за 1).

2) Из второго условия задачи следует, что $7x+16y=1$. Решаем полученную систему уравнений: $\begin{cases} 10(x+y)=1 \\ 7x+16y=1 \end{cases}$ и находим: $x=\dfrac{1}{15}, y=\dfrac{1}{30}$, то есть первый мастер может выполнить всю работу за 15 дней.

Ответ: 15 дней.

Задача 3.5. В Бассейн проведены 4 трубы: через первые 2 трубы вода вливается в бассейн, а через 2 другие выливается. Если работают все 4 трубы, то бассейн наполняется за 3 часа, а если только первая, вторая и четвертая, то бассейн заполняется за 1 час. Если же работают вторая, третья и четвертая труба, то бассейн заполнится за 6 часов. За какое время заполнится бассейн, если будут работать только вторая и четвертая трубы?

Решение.

1) Пусть производительность первой, второй, третьей и четвертой труб соответственно равны x, y, z, q. Тогда, принимая объем бассейна за единицу, получим следующую систему уравнения:

$$\begin{cases} x+y-z-q=1/3 \\ x+y-q=1 \\ y-z-q=1/6 \end{cases}$$

2) Вычитая из второго уравнения первое, найдем, что $z=2/3$.

3) Подставляем в третье уравнение полученное значение z. Находим, что $y-q=5/6$, следовательно, если работают вторая и четвертая труба, то бассейн заполнится за 6/5 часа, то есть за 1 час и12 минут.

Ответ: 1час и 12 минут.

Упражнение 3.6 Бригада по плану производит за день 7200 одинаковых деталей, при этом у всех рабочих одна и та же норма. В бригаде заболели трое рабочих, поэтому чтобы выполнить ежедневный план, каждому из оставшихся пришлось изготовить сверх нормы 400 деталей. Сколько рабочих было в бригаде?

Упражнение 3.7. В бассейн проведены 4 трубы: через первые 2 трубы вода вливается в бассейн, а через 2 другие выливается. Если работают все 4 трубы, то бассейн наполняется за 15 часов, а если работают только первые 3, то бассейн заполняется за 6 часов. За сколько часов вытечет вода из целиком заполненного бассейна, если закрыть первые три трубы и оставить только четвертую?

3.3. Задачи на проценты

Задача 3.6. 500 кг руды содержат некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих 12,5 % железа, процент железа в руде повысился в 1,5 раза. Сколько килограммов железа осталось в руде после удаления указанных 200 кг примесей?

Решение.

1) Пусть после удаления примесей в руде осталось x кг железа.

2) В примеси содержалось $\frac{200 \cdot 12,5}{100} = 25$ килограммов железа, следовательно, первоначально в руде было $x + 25$ кг железа, что составляло $\frac{x+25}{500} \cdot 100 = \frac{(x+25)}{5}$ процентов.

4) В руде после удаления примесей процент железа был равен $\frac{x}{500-200} \cdot 100 = \frac{x+25}{500} \cdot 100 \cdot 1,5$, откуда $x = 225$ кг.

Ответ: 225 кг

Задача 3.7. Смешали раствор, содержащий 30% соляной кислоты, с раствором, содержащим 10% соляной кислоты. В результате получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов 30 %-ного раствора было взято?

Решение.

1) Пусть x – вес первого раствора, а y – вес второго.

2) Тогда в растворе, вес которого $x + y = 600$ г, содержится $3x/10 + y/10 = \frac{15 \cdot 600}{100} = 90$ г кислоты.

3) Таким образом, получили систему уравнений $\begin{cases} 3x/10 + y/10 = 90 \\ x + y = 600, \end{cases}$

решая которую найдем: $x = 150, y = 450$.

Ответ:: 150 г.

Задача 3.8. На автомобиль сначала подняли цену на 100%, а затем повысили еще на 150%. Какой процент составляет первоначальная цена автомобиля от его теперешней цены?

Решение.

1) Пусть первоначальная цена была равна x рублей.

2) После первого подорожания, цена на автомобиль стала $2x$ рублей, а после второго – $5x$ рублей, следовательно $\frac{x}{5x} \cdot 100 = 20$.

Ответ: 20%.

Упражнение 3.8. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4% примесей. Сколько выплавят металла (в тоннах) из 24 тонн руды?

Упражнение 3.9. Изделие стоит 500 рублей (его стоимость складывается из стоимости материала и затрат на изготовление). Стоимость изделия не изменилась после того, как стоимость материала возросла вдвое, а затраты на изготовление сократились на 25%. Найдите первоначальную стоимость материала (в рублях).

Упражнение 3.10. Два цеха должны были выпустить по плану 180 станков в год. Первый цех выполнил работу на 112%, а второй на 110%, поэтому вместе они выполнили 500 станков. Сколько станков сверх плана выпустил второй цех?

Упражнение 3.11. Дан кусок латуни**.** Если его сплавить с 3 кг чистой меди, то получится сплав, содержащий 90% меди. Если бы этот кусок латуни сплавили с другим куском латуни, весом 2 кг и содержащим 90% меди, то получили бы сплав, содержащий 85% меди. Сколько килограммов меди содержал данный кусок латуни?

3.4. Текстовые задачи, которые решаются в целых числах

Задача 3.9. Найдите 4 натуральных числа, если каждое из них, начиная со второго, на 7 больше предыдущего, а среднее арифметическое этих чисел равно 22,5.

Решение.

1) Обозначим эти числа x, y, z, t . Тогда их сумма $x + y + z + t =$ $= 22,5 \cdot 4 = 90$

2) $y = x + 7,\ z = y + 7 = x + 14,\ \ t = z + 7 = x + 21$, следовательно, $x + y + z + t = x + (x + 7) + (x + 14) + (x + 21) = 4x + 42$.

3) $4x + 42 == 90$, значит, $x = 12, y = 19, z = 26, t = 33$.

Ответ: $12,19,26,33$.

Задача 3.10. Найдите двузначное число *a*, если произведение его цифр равно 28, а его сумма с числом, записанным этими же цифрами, но в обратном порядке равна 121.

Решение.

1) Пусть $a = 10x + y$, где x, y – натуральные числа от 1 до 9 (нулями они быть не могут, так как произведение цифр не равно 0).

2) Из условия вытекает, что $\begin{cases} x \cdot y = 28 \\ (10x + y) + (10y + x) = 121, \end{cases}$ следовательно, после упрощения система примет вид: $\begin{cases} x \cdot y = 28 \\ x + y = 11 \end{cases}$.

3) Значит, x, y являются корнями квадратного уравнения: $z^2 - 11z + 28 = 0$.

4) Решив это уравнение, получим: $x = 7, y = 4$ или $x = 4, y = 7$. Таким образом, задача имеет 2 решения: 47 и 74.

Ответ: 47 и 74.

Задача 3. 11. Группа студентов из 30 человек получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5.Сумма полученных оценок равна 93, причем » троек» было больше, чем «пятерок» и меньше, чем «четверок». Кроме того, известно, что число » четверок» делилось на 10, число «пятерок» было четным. Сколько студентов за экзамен получили пятерки, четверки, тройки и двойки?

Решение.

1) Пусть количество студентов, получивших оценки 2, 3, 4, и 5, соответственно равно *x*, *y*, *z* и *t*. Исходя из условия задачи, получим:

$$\begin{cases} x+y+z+t=30 \\ 2x+3y+4z+5t=93 \\ t<y<z \\ z=10n,\ t=2k \end{cases}$$. Заметим, что все неизвестные – неотрицательные целые числа, поэтому z может равняться 0, 10, 20,30, но 0 не удовлетворяет неравенству, 30 не удовлетворяет второму уравнению.

2) Предположим, что $z=20$. Тогда получим: $\begin{cases} x+y+t=10 \\ 2x+3y+5t=13 \end{cases}$.

Вычитая первое уравнение, умноженное на 2, из второго, получим: $2y+3t=-7$, что невозможно. Значит $z=10$.

3) В этом случае получаем систему: $\begin{cases} x+y+t=20 \\ 2x+3y+5t=53 \\ t<y<10 \\ t=2k \end{cases}$. Из первых двух уравнений найдем, что $y=13-3t$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x+y+t=20 \\ y=13-3t \\ t<y<10 \\ t=2k \end{cases}.$$

4) Подставив выражение для y в неравенство, получим, что $1<t<3\frac{1}{4}$. Поскольку известно, что t четное, то из этого неравенства следует, что $t=2$.

5) Теперь из первых двух уравнений находим, что $y=7, x=11$.

Ответ: Количество "пятерок" равно 2, "четверок" – 7, "троек " – 10 и "двоек" – 11.

Задача 3.12. Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а 3 тетради и 1 блокнот на 36 рублей стоят меньше, чем 5 ручек. Какова цена каждого предмета в отдельности, если каждый предмет стоит целое число рублей и цена тетради – четное число рублей?

Решение.

1) Пусть цена тетради, блокнота и ручки соответственно равна m, n, k. Составим соответствующие уравнения:

$$\begin{cases} 1m + 3n + 2k = 98 \\ 3m + 1n + 36 = 5k \end{cases}.$$

2) Заметим, что по условию m – четное, но тогда n – четное и k – тоже четное.

3) Исключим m, для этого первое уравнение умножим на 3 и вычтем из него второе: $8n + 6k - 36 = 294 - 5k$. Получим: $8n + 11k = 330$, следовательно, n делится на 11 и, так как n – четное, то $n = 22q$.

4) Теперь уравнение примет вид: $8 \cdot 22q + 11k = 330$. Сократим его на 11, получим: $16q + k = 30$.

5). Из последнего уравнения следует, что q может быть только 1.

6) Итак, $q = 1$, $n = 22$, $k = 14$. Подставляя значения n и k в уравнения системы, найдем, что $m = 4$.

Ответ: тетрадь стоит 4 рубля; блокнот 22 рубля и ручка 14 рублей.

Заметим, что, если отказаться от условия, что цена ручки – четное число, то появится второе решение: тетрадь стоит 21 рубль; блокнот 11 рублей и ручка 22 рубля.

В принципе такие задачи с неоднозначным ответом тоже часто встречаются. Отметим также, что в процессе решения этой задачи нам пришлось решить в целых числах систему двух уравнений с тремя неизвестными.

Упражнение 3.12. Длины сторон прямоугольника выражаются целыми числами. Его площадь равна 2015 см^{2,} а периметр меньше 200 см. Найдите длины сторон этого прямоугольника.

Упражнение 3.13. Известно, что в первом пруду плавают n рыб, причем их количество больше, чем 400, но меньше, чем 600. Количество рыб во втором пруду равно m, причем $n : m = 47 : 36$, кроме того, число m можно получить, поменяв местами первую и последнюю цифры в числе n. Найдите количество рыб в первом пруду.

Упражнение 3.14. Для нумерации страниц орфографического словаря было использовано 4493 цифры. Найдите количество страниц в словаре.

Упражнение 3.15. Фермерское хозяйство производит молоко, которым можно целиком заполнить некоторое количество бидонов по 50 литров каждый. Если это молоко разливать в сорокалитровые бидоны, то их понадобится на 5 бидонов больше, чем пятидесятилитровых, при этом один бидон будет неполным. Если же это молоко разливать в бидоны по 70 литров, то их понадобится на 4 бидона меньше, чем пятидесятилитровых, и один бидон тоже окажется неполным. Сколько литров молока произвело фермерское хозяйство?

В этом разделе мы рассмотрели тематику только наиболее часто встречающихся текстовых задач. Но, конечно, этим не исчерпывается все разнообразие таких задач.

4. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

При решении логических задач, как правило, приходится рассматривать все возможные версии ситуаций, чтобы отобрать нужную.

Задача 4.1. Найдите все двузначные числа n, для каждого из которых 2 из следующих утверждений верны, а 2 – нет:

а) n делится на 5;

б) n делится на 23;

в) $n+7$ – точный квадрат;

г) $n-10$ – точный квадрат.

Решение. Чтобы решить эту задачу мы должны последовательно рассмотреть все 6 пар утверждений, о которых говорится в условии.

1) Из утверждений а) и б) следует, что $n=5m=23k$, но, так как m делится на 23, а k делится на 5, что противоречит условию (n – двузначное число). Таким образом, эти 2 утверждения не могут быть верны.

2) Рассмотрим утверждения а) и в) : $n=5m+7=p^2$, но последняя цифра $5m$ или 5, или 0, значит, $5m+7$ оканчивается либо на 2, либо на 7. Ни один из квадратов целых чисел на эти цифры не оканчиваются, следовательно, эти 2 утверждения тоже не могут быть верны.

3) Теперь рассмотрим утверждения а) и г): $n=5m=10+q^2$.Из последнего равенства следует, что q делится на 5, то есть $5m=10+25l^2$, сокращая на 5, получим: $m=2+5l^2$. Поскольку n – двузначное число, то $m<20$, следовательно, $l=1$, $m=7$, а $n=35$.

4) Рассмотрим утверждения б) и в).Тогда $n=23k=p^2-7$. Так как n – двузначное число, то $k=1,2,3,4$, то есть $n=23,46,69,92$, но при добавлении к этим числам 7 мы не получим квадрата целого числа. Таким образом, эти 2 утверждения не могут быть верны.

5) Рассмотрим утверждения б) и г): $n=23k=10+q^2$. Как уже говорилось, в этом случае $n=23,46,69,92$. Если из этих чисел вычесть 10, то только в одном случае мы получим квадрат натурального числа ($46-10=36$). Таким образом, $n=46$.

6) Наконец, рассмотрим утверждения в) и г): $n=p^2-7=q^2+10$. Отсюда следует, что $p^2-q^2=17$ или $(p-q)(p+q)=17$. Так как 17 – простое число, то получаем система уравнений: $\begin{cases} p+q=17 \\ p-q=1 \end{cases}$. Решив эту систему, найдем, что $p=9, q=8$, а $n=74$.

7) Таким, образом, из всех данных утверждений верны только а) и г); б) и г); в) и г), то есть n может быть равно 35, 46 и 74.

Ответ: 35, 46 и 74.

Задача 4.2. Воронов, Павлов, Левашов и Сахаров – четыре молодых талантливых человека. Известно, что среди них один танцор, другой певец, третий – художник, четвертый – писатель. Кроме того, о них известно следующее:

а) Воронов и Левашов сидели в зале консерватории в тот вечер, когда был сольный концерт певца;

б) Павлов и писатель вместе позировали художнику;

в) писатель написал повесть о Сахарове и Воронове;

г) Воронов никогда не слышал о Левашове.

Спрашивается, кто из них, чем занимается?

Решение

1) Составим таблицу фамилий и профессий, которую будем заполнять постепенно, по мере анализа утверждений, содержащихся в условии задачи.

Таблица 4.1

Таблица фамилий и профессий

Фамилии	Профессии			
	Танцор	Художник	Певец	Писатель
Воронов	+	–	–	–
Павлов	–	–	+	–
Левашов	–	–	–	+
Сахаров	–	+	–	–

2) Из условия следует, что Воронов и Левашов не певцы (в соответствующих ячейках табл. 4.1. ставим « – »).

3) Павлов не художник и не писатель (в соответствующих ячейках табл. 4.1. ставим « – »).

4) Сахаров и Воронов не писатели (в соответствующих ячейках табл. 4.1. ставим « – »).

5) Теперь видно, что Левашов – писатель (в соответствующей ячейке табл. 4.1. ставим « + »).

6) Воронов никогда не слышал о Левашове.

7) Так как писатель позировали художнику, но Воронов его не знает, значит, Воронов не художник, а танцор (в соответствующих ячейках табл. 4.1. ставим « – » и « + »).

8) Следовательно, Павлов – певец, а Сахаров – художник (в соответствующих ячейках табл. 4.1. ставим « + »).

Ответ: Воронов – танцор, Сахаров – художник, Павлов певец, а Левашов – писатель.

Замечание.4.1. Составлять таблицу не обязательно, но во многих случаях она помогает.

Упражнение 4.1. Можно ли, следуя правилам игры, выложить в цепь все 28 костей домино так, что

а) на обоих концах были 1,

б) на одном конце была 1, а на другом 5?

Упражнение 4. 2. Можно ли за круглым столом рассадить 6 мужчин и несколько женщин так, чтобы никакие 2 женщины не сидели рядом, и чтобы напротив любого мужчины диаметрально противоположно сидела женщина?

Упражнение 4.3. Найдите натуральные число n, если для него два из следующих утверждений верны, а одно – нет:

а) $n+51$ есть точный квадрат;

б) последняя цифра числа n – единица;

в) $n-38$ – точный квадрат.

Упражнение 4.4. Жители города Правдина всегда говорят правду, а жители соседнего города Кривдина всегда лгут. Жители обоих городов бывают в гостях друг у друга. Однажды приезжий встретил трех человек A, B и C, двое из которых были из Кривдина, а один из Правдина. Приезжий спросил у A, из какого он города, но тот ответил так тихо, что приезжий не расслышал. Тогда он обратился к B и C с вопросом: «Что он мне ответил?». B и C хором сказали: «Он сказал, что он из Кривдина». Установите, где проживают A, B и C.

5. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Немецкий математик Петер Густав Лежен Дирихле получил целый ряд важнейших результатов в различных областях механики и математики, Как мы уже упоминали, принцип Дирихле состоит в том, что если $n+1$ шар раскладывать по n ящикам, то обязательно в одном из них будет, по крайней мере, 2 шара. С помощью принципа Дирихле обычно доказывают *существование* объекта, обладающего заданными свойствами, но сам объект остается неизвестным.

Задача 5.1. В классе 40 учеников. Найдется ли месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не менее 4 учеников этого класса?

Решение.

Если бы в каждом месяце было меньше 4 дней рождения, то учеников было бы не больше $3 \cdot 12 = 36$, но их 40. Следовательно, хотя бы в одном месяце будет, по крайней мере, 4 дня рождения (принцип Дирихле).

Ответ: Да, найдется.

Задача 5.2. Имеются n натуральных чисел. Докажите, что среди них найдутся несколько (или может быть одно), сумма которых делится на n.

Решение.

1) Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ – эти числа. Рассмотрим суммы:

$$a_1$$
$$a_1 + a_2$$
$$a_1 + a_2 + a_3$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
....
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$$

2) Их ровно n. При делении на n различных остатков может быть тоже n: $0, 1, 2, 3, 4, ..., (n-1)$.

3) Следовательно, либо среди этих сумм есть число, которое делится на n (остаток равен 0), либо есть 2 суммы, у которых при делении на n одинаковые остатки (принцип Дирихле).

4) Во втором случае разность таких сумм представляет собой тоже сумму некоторых чисел данного набора, и она делится на n. Тем самым утверждение доказано.

Задача 5.3. Докажите, что существует натуральное число, последние четыре цифры которого 1238, и которое делится на 1237.

Доказательство.

1) Рассмотрим все числа вида: 1238; 12381238; …; 12381238…1238.

2) Возьмем различных 1237 таких чисел, то есть столько, сколько различных остатков при делении на число 1237.

3) Тогда возможны два случая: либо у всех этих чисел разные остатки при делении на 1237, но тогда среди них есть число, у которого остаток 0 и, следовательно, это число делится на 1237, либо есть 2 числа m и n, у которых одинаковые остатки (принцип Дирихле).

4) Пусть для определенности $m > n$. Тогда их разность имеет вид: $m - n = 12381238...1238000...00 = 12381238...1238 \cdot 10^k$ и она делится на 1237.

5) Заметим, что число 1237 не имеет общих множителей с числом 10^k, следовательно, 10^k не может делиться на 1237, а, значит, на 1237 делится число 12381238…1238.

Упражнение 5.1. Докажите, что найдется число вида 24312431…24310…0, которое делится на 4444.

Задача 5.4. Докажите, что существует степень числа 3, которая оканчивается на 0001.

Доказательство.

1) Рассмотри 10^4 разных степеней числа 3.

2) Ни одна из них не делится на 10^4.

3) Следовательно, среди них есть, по, крайней мере, 2 степени 3^m и 3^n, которые имеют при делении на 10^4 одинаковые, не равные 0 остатки.

4) Пусть для определенности $m > n$ и рассмотрим разность $3^m - 3^n = 3^n(3^{m-n} - 1)$.

5) Эта разность делится на 10^4, но 3^n не имеет общих делителей с 10^4 и, значит, не делится на 10^4, а отсюда немедленно вытекает, что $3^{m-n} - 1$ делится на 10^4, то есть $3^{m-n} - 1 = k \cdot 10^4$.

6) Таким образом, $3^{m-n} = k \cdot 10^4 + 1$, а это означает, что число 3^{m-n} оканчивается цифрами 0001.

Упражнение 5.2. Докажите, что существуют 2 степени числа 4, у которых

а) одинаковая последняя цифра;

б) одинаковые 2 последние цифры;

в) одинаковые 3 последние цифры.

Упражнение 5.3. В школе 1000 учащихся и 30 классов. Докажите, что хотя бы в одном классе не менее 34 учеников.

Упражнение 5.4. В классе 33 ученика, а сумма всех их возрастов равна 430. Докажите, что найдутся 20 учеников, сумма возрастов которых больше 260.

Упражнение 5.5. Докажите, что среди любых шести чисел найдутся 2, разность которых делятся на 5.

6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – это часть математики, в которой изучается вопрос: сколько различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из элементов данного конечного множества. Она возникла в XVI веке. Толчок к ее развитию, как и для теории вероятностей, дал анализ азартных игр. Типично комбинаторная задача, например, такая: сколькими способами можно получить данное число при бросании двух игральных костей. Впоследствии комбинаторными задачами занимались известные ученые: Паскаль, Ферма, Яков Бернулли, Лейбниц, Эйлер. В наши дни комбинаторика получила дальнейшее развитие в работах современных математиков и нашла широкое применение при решении серьезных хозяйственных проблем. Например, при организации транспортных перевозок, составлении планов производства и реализации продукции, декодировании шифров, прочтении древних рукописей на неизвестных языках и так далее.

Мы рассмотрим очень небольшой раздел комбинаторики, который раньше входил в курс средней школы.

Пусть W_n – множество, состоящее из n различных элементов. Заметим, что элементы конечного множества всегда можно занумеровать, и оно станет *упорядоченным* (естественным образом).

Упорядоченные множества считаются *разными*, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком, либо тем и другим.

Далее мы будем рассматривать подмножества W_n (упорядоченные и неупорядоченные), удовлетворяющие определенным условиям.

6.1. Перестановки

Любое расположение в определенном порядке элементов множества W_n называется *перестановкой из n элементов* этого множества, то есть *перестановки* – это упорядоченные множества, состоящие из всех элементов данного множества W_n и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения.

Например, $W_3 = \{2,8,17\}$ $(n=3)$. Тогда перестановки элементов множества W_3: $\{2,8,17\}$, $\{8,17,2\}$, $\{17,2,8\}$, $\{8,2,17\}$, $\{17,8,2\}$, $\{2,17,8\}$.

Из определения следует, что всевозможные перестановки элементов данного множества W_n состоят из одних и тех же n элементов, то есть имеют одинаковый «качественный» состав и, следовательно, равны как множества, а отличаются друг от друга только порядком элементов.

Посчитаем, сколько различных перестановок можно составить из n различных элементов (обозначают это число обычно P_n). Первый элемент мы можем выбрать n способами, после чего у нас останется только n–1 элемент, поэтому второй элемент мы можем выбрать n–1 способом. Причем для каждого первого элемента у нас $n-1$ вариант выбора второго элемента. Таким образом, первые два элемента перестановки можно выбрать $n\cdot(n-1)$ способами. На каждую такую комбинацию первых двух элементов приходится $n-2$ вариантов выбора третьего элемента, то есть первые три элемента можно выбрать $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$ способами. Таким образом, мы получим, что все n элементов можно выбрать $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot1$ способами. Заметим, такое произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается символом $n!$ и читается «эн факториал». Например, 6! читается «шесть факториал», при этом $6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$. Итак, из n элементов можно составить $n!$ перестановок, то есть

$$P_n = n!.$$

Задача 6.1. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

Решение. Очевидно, что существует столько способов расставить 5 книг, сколько существует перестановок из 5 элементов, то есть количество способов равно $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.

Ответ: 120.

Задача 6.2. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг так, чтобы 2 данные книги стояли рядом?

Решение.

1) «Склеим» эти две книги. Это можно сделать $2!=2$ способами. В итоге у нас получится 4 книги (одна из них сдвоенная).

2) Эти 4 книги можно переставить $4!$ способами.

3) Таким образом, у нас получится $2!\cdot 4!=2\cdot24=48$ способов.

Ответ: 48.

Задача 6.3. Сколькими способами можно занумеровать числа $1,2,3,4,5,6,7,8$ так, чтобы все нечетные числа имели четные номера?

Решение.

1) Среди данных чисел нечетных – 4. Их можно нумеровать только четными номерами (2,4,6,8). А это можно сделать столькими способами, сколько можно составить перестановок из 4 элементов, то есть – 4! способами.

2) Аналогично остальные 4 числа мы должны нумеровать числами 1,3,5,7. Здесь тоже будет 4! вариантов.

3) Таким образом, на каждый вариант нумерации нечетных чисел будет 4! вариантов нумерации четных. Чтобы получить общее количество вариантов надо взять произведение $4! \odot 4! = 24 \odot 24 = 576$.

Ответ: 576.

Задача 6.4. Пусть дана квадратная таблица чисел из 5 строк и 5 столбцов (в доме 5 этажей и 5 подъездов). Требуется из этой таблицы выбрать 5 чисел так, чтобы все они были из разных строк и разных столбцов (требуется выбрать 5 делегатов от дома так, чтобы они представляли каждый подъезд и каждый этаж). Спрашивается, сколькими способами это можно сделать.

Решение.

1) Чтобы ответить на поставленный вопрос, припишем каждому числу из таблицы два номера: i – номер строки, в которой стоит данное число (номер этажа) и j – номер столбца (номер подъезда), которые определяют положение числа в таблице, то есть являются как бы его «табличными координатами».

2) Выстроим выбранные числа так, чтобы номера строк (этажей) шли в естественном порядке: 1, 2, ... , 5 (у нас ведь присутствуют номера всех строк).

3) При этом номера столбцов (подъездов) окажутся переставленными (согласно условию будут присутствовать номера всех столбцов). Отсюда следует, что существует столько способов выбора 5 чисел из нашей таблицы по данному правилу, сколько существует перестановок из номеров столбцов, то есть перестановок из чисел $1,2,3,4,5$.

6) Как мы установили, это количество будет равно $5! = 120$.

Ответ: 120.

Задача 6.5. Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Очевидно, ладьи должны стоять по одной в каждой «строке» и по одной в каждом «столбце», то есть эта задача такая же, как предыдущая. Следовательно, их можно расставить 8! способами: $8! = 1 \odot 2 \odot 3 \odot 4 \odot 5 \odot 6 \odot 7 \odot 8 = 40320$.

Ответ: 40320.

Задача 6.6. Сколькими способами можно 30 человек разбить на 3 группы по 10 человек?

Решение.

1) Эти 30 человек можно выстроить в шеренгу 30! способами.

2) Затем в первую группу включить первые 10 человек, во вторую – следующие 10 человек и в третью оставшиеся 10 человек.

3) При таком формирование групп их состав может повторяться. Например, если в шеренге из 30 человек переставлять только первые 10 человек, то составы групп меняться не будут, и мы получим 10! одинаковых разбиений. Аналогичная ситуация для второй и третьей групп.

4) Таким образом, различных разбиений будет не 30!, в $10!\cdot 10!\cdot 10!$ раз меньше.

5) Итак, 30 человек можно разбить на 3 группы по 10 человек $\dfrac{30!}{10!\cdot 10!\cdot 10!}$ способами.

Ответ: $\dfrac{30!}{10!\cdot 10!\cdot 10!}$.

Упражнение 6.1. В шестиместное купе вошли 6 человек. Сколькими способами они могут занять места?

Упражнение 6.2. В шестиместное купе вошли 5 человек. Сколькими способами они могут занять места?

Упражнение 6.3. В шестиместном купе на трех местах можно сидеть по движению поезда, а на трех – против движения. В купе вошли 6 человек среди них женщина с ребенком, которые хотят сидеть рядом. Сколькими способами при этом пассажиры могут занять места?

Упражнение 6.4. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр $0,1,3,5,7$, если каждое число не содержит одинаковых цифр?

Упражнение 6.5. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определите количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.

Упражнение 6.6. В шахматном турнире двух команд по 8 человек участники партий и цвет фигур каждого игрока определяются жеребьевкой. Сколько различных исходов жеребьевки?

Рассмотрим теперь слово «карта». Если бы все буквы этого слова были различными, то из них можно было бы составить 5! различных «слов». Но буква «а» повторяется 2 раза, поэтому вид перестановки не изменится, если их поменять местами. Таким образом, различных перестановок будет в 2 раза меньше: $5!/2 = 60$.

Перейдем теперь к общему случаю. Если во множестве, состоящем из n элементов, есть только k различных элементов, причем первый элемент входит n_1 раз, второй элемент − n_2 раза, …, k-ый элемент − n_k раз ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), то тогда число *перестановок с повторениями* из n элементов уменьшится и будет равно

$$\tilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!},$$

поскольку одинаковые элементы можно переставлять между собой, не меняя вид перестановки.

Например, для множества {2,2,8,8,8} ($n = 5$, $k = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$) всевозможных перестановки с повторениями: будет $\frac{5!}{2!3!} = 10$: {2,2,8,8,8}; {8,2,2,8,8}; {8,8,2,2,8}; {8,8,8,2,2}; {2,8,2,8,8}; (8,2,8,2,8); (8,8,2,8,2}; (2,8,8,2,8); (8,2,8,8,2); (2.8.8.8.2).

Задача 6.7. Сколько различных «слов» можно составить, перестановкой букв слова «математика»?

Решение.

1) В слове математика 10 букв, причем буква «а» встречается 3 раза, буква «м» – 2 раза, буква «т» – 2 раза, а остальные буквы – по 1 разу.

2) С учетом формулы для перестановок с повторениями получим $\frac{10!}{3!2!2!}$ «слов».

Ответ: $\frac{10!}{3!2!2!}$

Упражнение 6.7. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы в слове «мама»?

Упражнение 6.8. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 3, 3, 5, 7, 7?

6.2. Размещения

Упорядоченное подмножество из m элементов данного множества W_n из n элементов называется *размещением из n элементов по m.*

Как и перестановка, размещение – это упорядоченное множество, но в отличие от перестановки в него входят, вообще говоря, не все элементы данного множества W_n. Размещения отличаются друг от друга или «качественным» составом элементов, или их порядком, или и тем и другим. Так, например, если $W_3 = \{2,8,17\}$,то $\{2,8\}$, $\{8,2\}$, $\{2,17\}$, $\{17,2\}$, $\{8,17\}$, $\{17,8\}$ – всевозможные размещения из 3-х элементов по 2.

Посчитаем, сколько будет различных размещений из n элементов по m (обозначают это число обычно A_n^m и читают: «а из n по m» или «число размещений из n по m»). Рассуждаем как в предыдущем случае: первый элемент можно выбрать n способами, второй – $(n–1)$ способами, таким образом, первые два элемента можно выбрать $n \odot (n–1)$ способами. Далее, три элемента можно выбрать $n \odot (n–1) \odot (n–2)$ способами и т.д. Таким образом, m элементов можно выбрать $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))$ способами, то есть

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при этом, по определению, полагают, что $0! = 1$, то есть в случае $m = n$ мы имеем дело с перестановками и формула остается верна.

Задача 6.8. В первенстве по футболу участвуют 15 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены между участниками?

Решение. Эта задача связана с размещениями, так как сначала мы выбираем трех призеров, а потом среди них распределяем 1, 2 и 3-е места. Таким образом, всего вариантов $A_{15}^3 = 15\cdot14\cdot13 = 2730$.

Ответ: 2730.

Задача 6.9. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребёнка, если общее число имен равно 300 и дают ему не более трех имен?

Решение.

1) Назвать ребенка с помощью трех имен, выбрав три различных имени в определенном порядке, можно $A_{300}^3 = 300\cdot299\cdot298$ способами.

2) Назвать ребёнка, используя два имени, можно $A_{300}^{2} = 300 \cdot 299$ способами.

3) Для одного имени будет 300 вариантов.

4) Таким образом, всего будет $300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 =$ $= 26820600$ различных имен.

Ответ: 26820600.

Задача 6.10. Имеется 10 различных модулей 1-ой группы и 7 различных модулей 2-ой группы. Их соединяют последовательно так, чтобы никакие два модуля второй группы не стояли в этой цепочке рядом. Сколько можно составить таких (различных) цепочек?

Решение.

1) Только из модулей 1-ой группы можно составить P_{10}=10! различных цепочек.

2) При этом между модулями 1-ой группы и по краям будет 11 мест, куда нужно расставить модули второй группы. то есть модули второй группы можно расставить A_{11}^{7}=11!/4! способами.

3) Таким образом, всего способов будет: $10! \cdot 11!/4!$.

Ответ: $10! \cdot 11!/4!$.

Упражнение 6.9. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя из 25 учеников класса?

Ответ: 600

Упражнение 6.10. Сколько различных трехцветных флагов можно сделать, комбинируя синий, красный, зеленый и белый цвета?

Упражнение 6.11. Команда из 5 человек выступает в соревнованиях, в которых участвуют еще 20 человек. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?

Размещением из n элементов по m с повторениями называется упорядоченное множество элементов множества W_n, состоящее из m элементов, среди которых могут оказаться одинаковые элементы.

Например, если W_3 = {2,8,17},то {2,8}, {8,2}, {2,17}, {17,2}, {8,17}, {17,8}, {2,2}, {8,8}, {17,17} – всевозможные размещения из 3-х элементов по 2 с повторениями.

Посчитаем, сколько будет различных размещений из n элементов по *m с повторениями* (обозначают $\tilde{A}_n^m$). Первый элемент можно выбрать n способами, второй – n способами (так как элементы могут повторяться), таким образом, первые два элемента можно выбрать $n \cdot n$

способами. Далее, три элемента можно выбрать $n \cdot n \cdot n$ способами и т.д. Таким образом, m элементов можно выбрать n^m способами, то есть

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Задача 6.11. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр $\{1,2,3,4,5\}$, если: *a*) ни одна цифра не повторяется; *b*) цифры могут повторяться?

Решение.

1) Если все цифры числа различные, тогда всевозможных трехзначных чисел, состоящих из пяти цифр, столько, сколько размещений из 5-ти по 3, то есть $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2) Если цифры в числе могут повторяться, тогда различных трехзначных чисел, состоящих из цифр множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, столько, сколько размещений из 5-ти по 3 с повторениями, то есть $\tilde{A}_5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Ответ: a) 60; *b*) 125.

Задача 6.12. Сколько пятизначных чисел можно составить, используя три цифры: $0,1,2$?

Решение.

1) Если пятизначные числа состоят из цифр 0, 1, 2, то первую цифру слева можно выбрать двумя способами (1 или 2, так как если возьмем первой цифру 0, получим не пятизначное число).

2) В качестве второй цифры слева можно взять любую из данных цифр, то есть тремя способами.

3) Аналогично третью цифру слева можно выбрать тремя способами.

4) Таким образом, таких чисел будет $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$ (или $2 \cdot \tilde{A}_3^4 = 162$).

Ответ: 162.

Упражнение 6.12. Цифровой замок содержит 6 регистров, в каждом из которых можно установить 1 из 10 цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Сколько будет всего различных комбинаций цифр?

Упражнение 6.13. Сколько среди четырехзначных номеров машин таких, в которые цифра 3 входит 1 раз?

6.3. Сочетания

Любое подмножество из k элементов множества W_n из n элементов называется *сочетанием из n элементов по k.* Сочетание отличается от размещения тем, что в нем не учитывается порядок элементов. Два сочетания отличаются друг от друга только «качественным» составом.

Например, если $W_3 = \{2,8,17\}$,то $\{2,8\}$, $\{2,17\}$, $\{8,17\}$ – всевозможные сочетания из 3-х элементов по 2.

Количество различных сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k (читают: «ц из n по k», или «число сочетаний из n по k»). Очевидно, что число сочетаний связано с числом размещений формулой:

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k,$$

так как элементы каждого сочетания можно переставить $k!$ способами и при этом мы получим различные размещения, состоящие из этих же элементов. Таким образом, число различных сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

При решении задач рассматривают и такие крайние случаи, когда $k = n$ (таких сочетаний всего одно: $C_n^n = 1$) и $k = 0$, то есть в качестве сочетания берется пустое множество (такое сочетание тоже единственное: $C_n^0 = 1$). Написанная выше формула и в этих крайних случаях остается справедливой, так как мы уже упоминали, что, по определению, полагают $0! = 1$.

Задача 6.13. Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для соревнований по бегу, если всего 7 бегунов?

Решение. Задача связана с подсчетом количества различных подмножеств из четырех элементов, которые можно выбрать из 7 элементов, следовательно, это количество равно $C_7^4 = \dfrac{7!}{4!\cdot 3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$

Ответ: 35.

Заметим, что если бы команда выбиралась для эстафетного бега, то число способов выбора было бы равно $A_7^4 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840,$ так как играл бы роль порядок выбора спортсменов.

Задача 6.14. В турнире принимали участие 10 шахматистов. Каждые два шахматиста сыграли по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

Решение. Партий было сыграно столько, сколько можно выбрать пар шахматистов, то есть $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!} = \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45.$

Ответ: 45.

Задача 6.15. Сколькими способами можно разместить m одинаковых шаров в n различных ящиках ($m < n$), если в каждый ящик можно положить только один шар?

Решение. Количество способов размещения m шаров будет равно количеству способов выбрать m ящиков, то есть C_n^m.

Ответ: C_n^m.

Задача 6.16. Сколько различных диагоналей у пятнадцатиугольника?

Решение. Если соединить всевозможные пары вершин прямыми, то при этом получатся не только диагонали, но и стороны. Следовательно, количество диагоналей будет равно $C_{15}^2 - 15 = \dfrac{15!}{2! \cdot 13!} - 15 =$

$= \dfrac{15 \cdot 14}{2} - 15 = 90.$

Ответ: 90.

Упражнение 6.14. Сколькими способами 10 человек можно разделить на 2 группы?

Упражнение 6.15. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 12 черных и 12 белых пешек?

Упражнение 6.16. 8 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий?

Упражнение 6.17. Даны 10 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие 4 из них не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти точки?

Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется множество элементов множества W_n, состоящее из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые.

Например, если $W_3 = \{2,8,17\}$,то $\{2,8\}$, $\{2,17\}$, $\{8,17\}$, $\{2,2\}$, $\{8,8\}$, $\{17,17\}$ – всевозможные сочетания с повторениями из 3-х элементов по 2.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Задача 6. 17. Сколькими способами можно составить букет из пяти цветов, если в наличии есть цветы трех сортов?

Решение. Здесь множество W_n состоит из трех различных элементов (n=3). Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то искомое число букетов равно числу сочетаний с повторениями из трех элементов по 5, то есть

$$C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21.$$

Ответ: 21.

Упражнение 6.18. В кондитерской 7 видов пирожков. Сколько у покупателя вариантов выбрать 4 пирожка?

7. ПЛАНИМЕТРИЯ

При решении геометрических задач необходимо знать все теоремы школьного курса геометрии, поскольку они отражают различные свойства геометрических фигур.

Методы решения геометрических задач можно грубо разделить на четыре категории: геометрические, аналитические, координатные и векторные. В каждом конкретном случае нужно выбирать метод, исходя из условия задачи.

Как правило, во всех случаях нужно начать с того, что сделать крупный аккуратный рисунок, при этом не следует рисунок перегружать лишними линями. Его можно делать и от руки, но стараться, чтобы он отражал основные характеристики фигуры, например, чтобы прямой угол был прямым. Хороший рисунок может иногда служить подсказкой, например, что три точки лежат на одной прямой. Но при этом, конечно, в процессе решения или доказательства нельзя в качестве аргумента приводить рисунок.

Приведем далее ряд геометрических задач и упражнений, иллюстрирующих те или иные методы решения.

Задача 7.1. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.

Доказательство.

1) Сделаем рисунок (см. рис. 7.1).

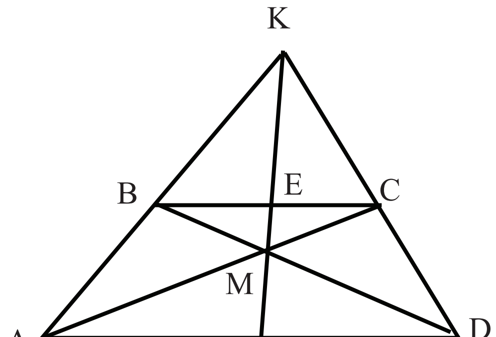

Рис. 7.1. Рисунок к задаче 7.1

Пусть M – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ с основаниями AD BC, а K – точка пересечения продолжений ее боковых сторон (см. рис. 7.1).Обозначим P и E середины сторон AD и BC соответственно.

2) Так как AD и BC параллельны, то любая прямая, проходящая через точку K делит основания трапеции в одном и том же отношении, считая от вершин A и B. Отсюда следует, что точки K, E и P лежат на одной прямой.

3) Точно также прямая, проходящая через точку M делит AD и BC в одном и том же отношении, только считая от вершин A и C. Значит, точки E, M и P тоже лежат на одной прямой.

4) Таким образом, точки K, E, M и P лежат на одной прямой и, следовательно, прямая KM проходит через середины оснований трапеции E и P.

Упражнение 7.1. Докажите, что в трапеции расстояние между серединами диагоналей равно полуразности длин оснований этой трапеции.

Упражнение 7.2. Непараллельные стороны неравнобочной трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Продолжения диагоналей трапеции пересекают эту прямую в точках P и Q. Докажите, что длина PQ равна $\frac{2ab}{b-a}$, где b и a – длины оснований трапеции.

Упражнение 7.3. Проведем через точку пересечения диагоналей трапеции прямую параллельно ее основаниям. Докажите, что длина отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, равна $\frac{2ab}{a+b}$, где b и a – длины оснований трапеции.

Задача 7.2. Окружность радиуса 6 касается сторон некоторого угла в точках M и N. Параллельно прямой MN проведены две касательные к этой окружности, которые образуют со сторонами угла трапецию. Найдите ее площадь, если длина MN равна 2.

Решение.

1) Сделаем рисунок (см. рис. 7.2). Пусть O – центр окружности, вписанной в данный угол с вершиной в точке T, R – ее радиус, BC и PQ – касательные к этой окружности, параллельные MN,

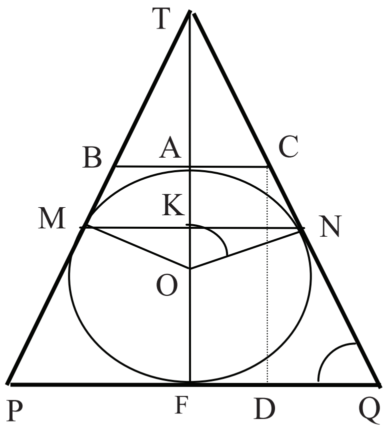

Рис. 7.2. Рисунок к задаче 7.2

2) Проведем радиусы в точки касания M и N .и прямую OT – биссектрису данного угла. Треугольники OMT и ONT равны, поэтому прямая OT перпендикулярна к MN , а, значит, к BC и PQ . Кроме того, OT делит отрезок MN пополам, следовательно, она тоже делит пополам отрезки BC и PQ .

3) Пусть A, K, F – точки пересечения прямой OT с отрезками BC , MN , PQ соответственно. Так как прямая OT проходит через центр окружности и перпендикулярна к касательным, то точки A и F – точки касания BC и PQ соответственно..

4) Заметим, что $AC = CN$ и $NQ = QF$ как касательные к окружности, проведенные из одной точки, поэтому $NQ = AC + FQ$ – полусумма оснований трапеции $PBCQ$.

5) $\angle KON = \angle FQN = \varphi$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

6) Из треугольника KON находим: $\sin\varphi = KN / R$.

7) Опустим перпендикуляр CD из точки C на PQ , $CD = 2R$ – высота трапеции $PBCQ$.

8) Из треугольника CDQ найдем: $CQ = 2R / \sin\varphi = 2R^2 / KN = = 4R^2 / MN$.

9) С учетом пунктов.4) и 7) получим, что площадь трапеции $PBCQ$ равна $2RCQ = 2R \cdot 4R^2 / (MN) = 8R^3 / CN = 864$.

Упражнение 7.4. Дана равнобочная трапеция. Известно, что в нее можно вписать окружность, и что длина высоты равна 12, а длина одного из оснований равна 24. Средняя линия делит трапецию на две фигуры. Найдите площади этих фигур.

Упражнение 7.5. В равнобочную трапецию вписана окружность радиуса 1,5. Средняя линия делит трапецию на две фигуры, площади которых относятся как 3 : 7. Найдите длины оснований трапеции.

Упражнение 7.6. Длины оснований трапеции равны 25 и 10, а длины боковых сторон – 13 и 14. Найдите площадь трапеции.

Задача 7.3. Дан остроугольный треугольник ABC. Продолжения высот BM и CN пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, в точках Q и P соответственно. Найдите радиус этой описанной окружности, если длина стороны BC равна 350, а длина PQ равна 672.

Решение.

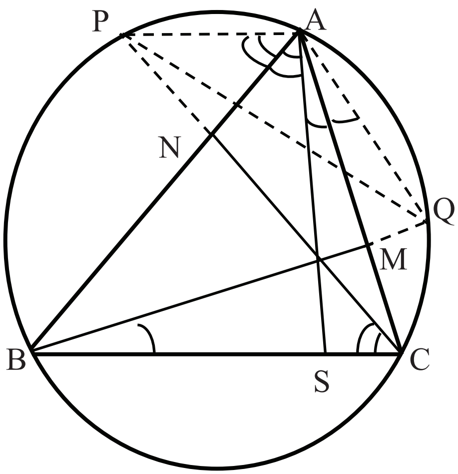

Рис. 7.3. Рисунок к задаче 7.3.

1) На рис. 7.3 изображен треугольник ABC и его высоты AS, BM и CN, а также окружность, описанная около данного треугольника. Высоты BM и CN продолжены до пересечения с описанной окружностью в точках Q и P соответственно.

2) В прямоугольных треугольниках DNC и BAS угол CBA общий, поэтому угол $\angle NCB = \angle BAS$.

3) По аналогичной причине $\angle MBC = \angle CAS$.

4) Теперь проведем отрезки PA, PQ и QA. Тогда $\angle PAB$ опирается на ту же дугу, что и $\angle PCB$, следовательно, $\angle PAB = \angle PCB = \angle BAS$ (см. рис. 7.3).

5) По аналогичным причинам $\angle QAC = \angle QBC = \angle CAS$ (см. рис. 7.3).

4) Из 3) и 4) следует, что если $\angle BAC = \alpha$, то $\angle PAQ = 2\alpha$.

5) Заметим, что у треугольников ABC и PAQ общая описанная окружность. Пусть радиус этой окружности равен r.

6) Тогда $BC = 2r\sin\alpha$, а $PQ = 2r\sin 2\alpha$.

7) Так как $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, то $\dfrac{PQ}{BC} = 2\cos\alpha$, откуда

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{PQ^2}{4BC^2}} \ (\sin\alpha > 0 \text{ при } 0 < \alpha < \pi).$$

8) Следовательно $r = \dfrac{BC}{2\sqrt{1 - \dfrac{PQ^2}{4BC^2}}} = \dfrac{BC^2}{\sqrt{4BC^2 - PQ^2}}$. Подставляя сюда числа из условия задачи, найдем, что $r = 625$.

Ответ: 625.

Упражнение 7.7. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите длины катетов треугольника.

Упражнение 7.8. Даны радиусы описанной и вписанной окружностей R и r прямоугольного треугольника. Докажите, что длины его сторон равны $2R; R + r \pm \sqrt{(R-r)^2 - 2r^2}$.

Упражнение 7.9. В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите длины сторон треугольника.

Замечание 7.1. Следует помнить, что фигура называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две точки этой фигуры, целиком ей принадлежит. Так, например, треугольник, трапеция, параллелограмм, круг – выпуклые фигуры, а четырехугольник. изображенный на рис. 7.4, не является выпуклым.

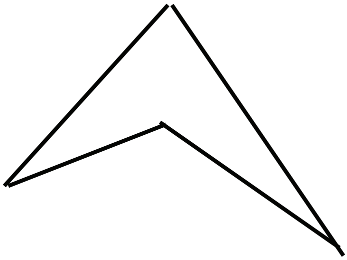

Рис. 7.4. Невыпуклый четырехугольник.

Упражнение 7.10. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки M, N, P, Q – середины его сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что четырехугольник $MNPQ$ – параллелограмм.

Задача 7.4. Дан выпуклый (неправильный) пятиугольник $ABCDE$, точки M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K – середины MP и NQ соответственно. Найдите длину HK, если длина AE равна 7.

Решение.

1) Сделаем рисунок пятиугольника $ABCDE$ (см. рис. 7.5). Изобразим на нем все точки и отрезки, о которых шла речь в условии задачи.

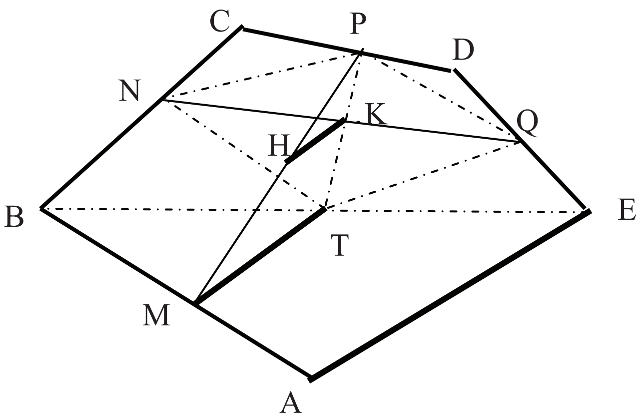

Рис. 7.5. Рисунок к задаче 7.4.

2) Проведем BE, и пусть T – середина BE.

3). Четырехугольник $TNPQ$ – параллелограмм (см. упражнение 7.7), NQ и PT – его диагонали, следовательно, середина NQ – точка K будет серединой и PT.

4) Заметим теперь, что HK – средняя линия треугольника MPT, параллельная MT ,следовательно, $HK = MT / 2$.

5) MT, в свою очередь, является средней линией треугольника ABE, параллельной AE. Значит, $MT = AE / 2$.

6) Таким образом, $HK = AE / 4 = 7 / 4$.

Ответ: 7/4 = 1,75.

Замечание 7.2. Решение задачи 7.4. простое, но догадаться провести такое предварительное построение непросто.

Приведем второе решение Задачи 7.4.

Второе решение задачи 7.4.

1) Начнем с рассмотрения следующего вопроса. Пусть дан треугольник ABC и M, N, P – середины сторон AB, BC, AC соответственно. Тогда четырехугольник $AMNP$ – параллелограмм (см. рис. 7.6). При этом по определению $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}$, но $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, а $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Таким образом, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

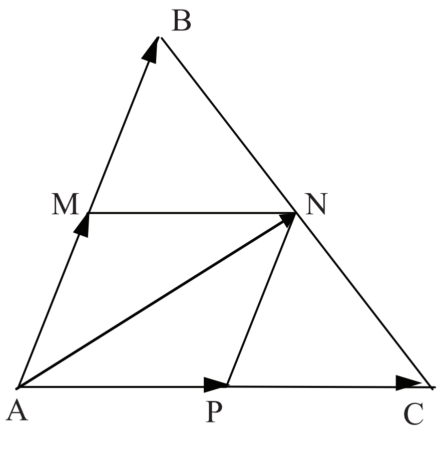

Рис. 7.6. Вспомогательный рисунок ко второму решению задачи 7.4

2) Вернемся теперь к данному пятиугольнику и рассмотрим векторы: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{HK}$ (см. рис. 7.7).

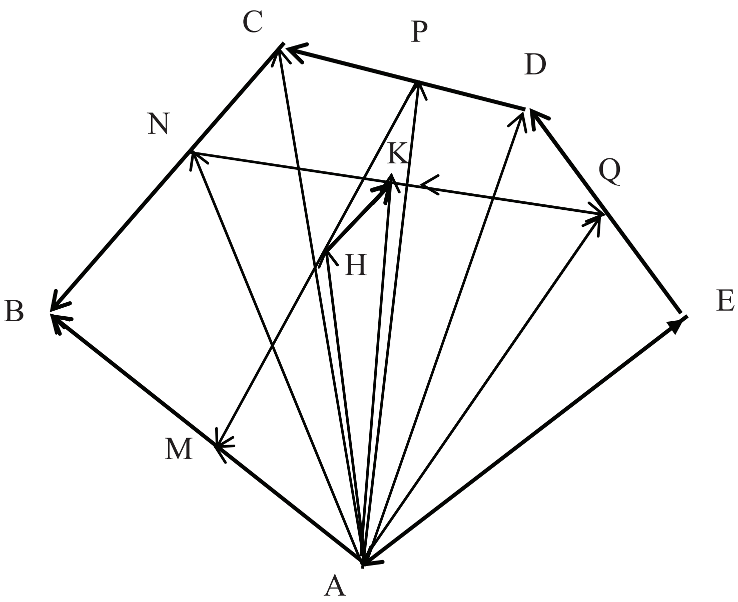

Рис. 7.7. Рисунок ко второму решению задачи 7.4

3) Вектор $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AH}$.

4) В треугольников ANQ точка K – середина NQ, поэтому в силу 1) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ})$. Аналогично в треугольнике AMP H – середина MP, поэтому $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP})$.

5) Таким, образом, $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP})$.

6) Векторы $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP}$, в свою очередь, из треугольников ABC, ACD и ADE можно представить в виде:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),\ \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}),\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}),\ \text{а}\ \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

7) Подставим полученные представления в выражение для вектора $\overrightarrow{HK}$:

$$\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} .$$

8) Итак, $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$,следовательно $HK = \frac{7}{4}1,75$.

Наше рассуждение показывает, что использование векторов иногда делает решение задачи чисто техническим и не требует особой изобретательности.

Упражнение 7.11. Дан треугольник ABC и точка пересечения его медиан O . Докажите, что из отрезков OA, OB и OC можно сложить треугольник.

Указание. Рассмотрите векторы, идущие из точки O к вершинам треугольника и докажите, что их сумма равна нуль-вектору.

Задача **7.5.** На плоскости даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до точки B в два раза больше, чем расстояние до точки A .

Решение. Для решения этой задачи используем аналитическую геометрию.

1) Введем на плоскости декартову систему координат следующим образом: поместим начало координат в точку A, а положительное направление оси X направим от A к B, и пусть для упрощения длина отрезка $|AB| = 3$. Тогда координаты точки $A(0;0)$ и координаты точки $B(3;0)$ (см. рис. 7.8).

2) Если теперь точки $M(x;y)$ принадлежат нашему геометрическому месту точек T , то есть $|BM| = 2|AM|$, то координаты этих точек должны удовлетворять уравнению: $2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$.

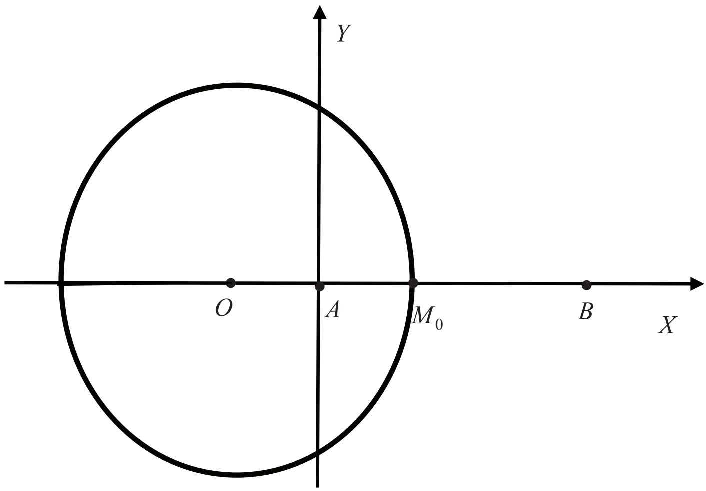

Рис. 7.8. Рисунок к задаче 7.5

3) Преобразуем это уравнение: $4x^2 + 4y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2$, $3x^2 + 6x + 3y^2 = 9$; $x^2 + 2x + y^2 = 3$; $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

4) Осталось дать геометрическую интерпретацию этого уравнения. Оно описывает окружность радиуса $R = \dfrac{2}{3}|AB|$. Ее центр – точка $O(-1,0)$ лежит на прямой AB за точкой A так, что расстояние $|OA| = 1 = \dfrac{1}{3}|AB|$.

Ответ: Геометрическое место точек M, для которых $|BM| = 2|AM|$, представляет собой окружность радиуса $R = \dfrac{2}{3}|AB|$, центр которой – точка O лежит на прямой AB за точкой A так, что расстояние $|OA| = \dfrac{1}{3}|AB|$.

Замечание 7.3. Для решения этой задачи мы использовали координатный метод, то есть, хотя в условии задачи не фигурировали координаты точек, но, введя соответствующим образом декартову систему координат, нам удалось найти ответ на поставленный вопрос.

Упражнение 7.12. Докажите, что геометрическое место точек равноудаленных от данной точки A и данной прямой L есть парабола.

Указание. Введите такую систему декартовых координат, чтобы точка A имела координаты $(0,1)$, а уравнение прямой L было $y=-1$.

Задача 7.6. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $A(-7;\,16)$ и удаленных от точки $B(4;-7)$ на расстояние, равное 25.

Решение.

1) Очевидно эти прямые – касательные к окружности с центром в точке B радиуса 25, проведенные из точки A.

2) Уравнение окружности: $(x-4)^2+(y+7)^2=625$.

3) Уравнения прямых, которые не параллельны оси OYи которые проходят через точку A(–7; 16), будут иметь вид: $y=k(x+7)+16$.

4) Поскольку эти прямые – касательные, то каждая из них имеет с окружностью единственную общую точку, то есть уравнение

$$(x-4)^2+(kx+7k+23)^2=625$$

имеет единственное решение.

5) В таком случае его дискриминант равен нулю. Раскроем скобки и после преобразований приведем уравнение к виду:

$$x^2(1+k^2)+2x(-4+7k^2+23k)+(49k^2+322k-80)=0.$$

6) Тогда дискриминант этого уравнения

$$D=(7k^2-4+23k)^2-(1+k^2)(49k^2+322k-80)=504k^2-506k+96.$$

7) Приравнивая дискриминант к нулю, получим уравнение для угловых коэффициентов k: $504k^2-506k+96=0$. Корни этого уравнения: $k_1=16/63$ и $k_2=3/4$.

8) Таким образом, уравнения прямых будут иметь вид:

$$y=(16/63)(x+7)+16 \text{ и } y=(3/4)(x+7)+16$$

или

$$16x-63y+1120=0 \text{ и } 3x-4y+85=0$$

Ответ: $16x-63y+1120=0$ и $3x-4y+85=0$

Замечание 7.4. Для решения этой задачи нам даже не понадобился рисунок. Все свелось к чисто алгебраическим выкладкам. В этом достоинство применения методов аналитической геометрии к решению геометрических задач.

Упражнение 7.13. Докажите, что координаты середины отрезка равны средним арифметическим соответствующих координат концов.

Упражнение 7.14. Докажите, что координаты точки пересечения медиан треугольника равны средним арифметическим соответствующих координат вершин.

В заключение заметим, что в этом пособии мы лишь проиллюстрировали некоторые методы решения задач. Чем больше вы будете решать задач, и читать литературы по математике, тем больше вы будете знать и уметь. У вас появится уверенность, что вы можете решить любую задачу. Много полезных и занимательных задач можно найти в интернете, а также в многочисленных изданиях по математике для школьников (смотрите, например, литературу, указанную в конце пособия).

Ответы к упражнениям

1.3. 3; **1.4.** 9; **1.5.** 6; **1.6.** 7; **1.7.** 2; **1.8.** 22; **1.9.** 17; **1.10.** $(x_1=2; y_1=2)$, $(x_2=0; y_2=0)$; **1.11.** $(x=-7; y=-3)$.

2.1. $(x-1)(x+3)(x+3)$; **2.2** $(x+1)(x^2+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ **;** **2.3.** $(3x+1)(x+3)(x^2+1)$; **2.4.** $(3x+1)(x+3)(x-1)^2$; **2.5.** $-2,-1/2,1/3,3$; **2.6.** 9; –6; **2.7.** 1; 2; **2.8.** 6; 14; **2.9.** 8; –5; **2.10. –2**; –1; **2.11.** 4, 12, 2; **2.12.** 3,–2,6,–1; **2.13.** –2,–4,–1,–8; **2.14.** 1,2,–5,–10.

3.1. 18 км; **3.2.** 18 км/час; **3.3.** 2 ч; **3.4.** 1,2 км/ч; **3.5.** 18 км/ч; **3.6.** 9 рабочих; **3.7.** 10 ч; **3.8.** 15 т; **3.9.** 100 руб.; **3.10.** 250 кг; **3.11.** 3,3 кг; **3.12.** 65 и 31; **3.13.** 423; **3.14.** 1400; **3.15.** 850 литров.

4.1. а) Можно, б) Нельзя**;** **4.2.** Нельзя: **4.3.** 1974: **4.4**. A живет в Правдине, B и C живут в Кривдине.

6.1. 6!; **6.2.** 6!; **6.3.** $4!\cdot 2!\cdot 4$; **6.4.** 42; **6.5.** $\frac{12!}{(2!)^6}$; **6.6.** $8!\cdot 2^8$; **6.7.** 6**;** **6.8.** 30; **6.9.** 600; **6.10.** 24; **6.11.** A_{25}^5; **6.12.** 10^6; **6.13.** 10^6; **6.14.** $C_{10}^5=252$; **6.15.** $C_{64}^{24}\cdot C_{24}^{12}=\frac{64!}{40!12!12!}$; **6.16.** $C_8^2=28$; **6.17.** $C_{10}^3=120$; **6.18.** $C_{7+4-1}^4=C_{10}^4=210$.

7.4. 63 кв.ед. и 117 кв.ед.; **7.5**. 1 и 9; **7.6.** 196 кв.ед.; **7.7.** 8 и 15; **7.9.** 25 см, 25 см и 10 см.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математика. Районные олимпиады. 6–11 классы / Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с.

2. Математика. Областные олимпиады. 8–11 классы / [Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А.и др.. – М. : Просвещение, 2010. – 239 с.

3. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / [Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и др.]. – М. : Просвещение, 2008. – 192 с.

4. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Агаханов Н.Х,. Подлипский О.К; [под общ. ред. Демидовой С.И., Колисниченко И.И. – М. : Просвещение, 2009. – 159 с.

5. Математика. Международные олимпиады / Агаханов Н.Х., Кожевников П.А., Терешин Д.А.. – М. : Просвещение, 2010. – 127 с.

6. Балаян Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задача по математике. 3-е изд. – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 364 с.

7. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика. – М.: Бюро Квантум, 2007. — 160 с.

8. Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993–2005 г./ Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006.– 456 с.

9. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика. Алгебра. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001 – 479 с.

10. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2012 года [сайт]. – http://olimpiads.mccme/ru/ommo/12/

11. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2013 года [сайт]. – http://olimpiads.mccme/ru/ommo/13/

12. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2014 года [сайт]. – http://olimpiads.mccme/ru/ommo/14/

13. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2012 года [сайт]. – http://olimpiads.mccme/ru/ommo/15/

14. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н. Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра.– М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007 – 454 с.

15. Шарыгин И.Ф., Кордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. – М. : Астрель · АСТ, 2001 – 397 с.

16. Бабинская И.П. Задачи математических олимпиад. – М. : Наука, 1973 – 110 с.

17. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗЫ (с решениями). Алгебра. (7-е издание) Под редакцией М.И. Сканави – М : «Высшая школа», 1994 – 526 с.

Учебное издание

САБУРОВА Татьяна Николаевна
ДУБИНСКИЙ Юлий Андреевич

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников

8–9-й классы

В авторской редакции

Компьютерная верстка *И.Г. Иваньшина*

Подписано в печать 01.09.16	Бумага офсетная	
Формат 60 × 90 1/16	Печать цифровая	Уч.-изд. л. 3,6
	Тираж 50 экз.	Заказ 5190

Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (495) 638-45-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (499) 236-76-17, тел./факс (499) 236-76-35