МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Л.Р. Ким-Тян, Ю.А. Дубинский

# МАТЕМАТИКА

## МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ПОДГОТОВКЕ К ОЛИМПИАДАМ ШКОЛЬНИКОВ

6–7 классов

Рекомендовано редакционно-издательским советом

МИСиС

Москва 2016

УДК 51
К40

**Ким-Тян Л.Р.**

К40 Математика : метод. пособие по подготовке к олимпиадам школьников : 6–7-й классы / Л.Р. Ким-Тян, Ю.А. Дубинский. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2016. – 55 с.

Цель данного пособия – помочь школьникам эффективно подготовиться к олимпиадам по математике.

Пособие содержит примеры олимпиадных заданий с разбором, анализ их выполнения учащимися, а также справочные материалы, охватывающие все представленные на олимпиаде разделы математики.

Пособие предназначено для школьников 6–11 классов и для учителей математики. Материалы пособия могут быть использованы для подготовки к различным олимпиадам по математике, а также на уроках математики.

**УДК 51**

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ........................................ 4

Введение ........................................ 5

1. ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ ........................................ 9

1.1. Числа ........................................ 9
1.2. Арифметические действия с числами ........................................ 10
1.3. Задачи ........................................ 11
1.4. Упражнения ........................................ 19

2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ НЕИЗВЕСТНОЕ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ ........................................ 21

2.1. Уравнения ........................................ 21
2.2. Неравенства ........................................ 23
2.3. Задачи ........................................ 25
2.4. Упражнения ........................................ 36

3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ........................................ 37

3.1. Системы линейных уравнений с двумя переменными ........................................ 37
3.2. Задачи ........................................ 40
3.3. Упражнения ........................................ 48

Ответы ........................................ 53

Библиографический список ........................................ 54

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*В математике есть своя красота,*
*как в живописи и поэзии.*

Н.Е. Жуковский

Удивительный мир открывает нам математика. Устный счет, решение логических и занимательных задач, умение анализировать, делать выводы – все это развивает математика. Школьные олимпиады прочно вошли в образовательный процесс учащихся. Каждый год под эгидой разных общественных и образовательных организаций проводятся олимпиады по основным школьным предметам: русскому языку, математике, физике, химии, информатике, иностранному языку и другим. В НИТУ МИСиС проводится олимпиада «МИСиС зажигает звезды» для школьников 6–11 классов, главной целью которой является выявление и поддержка талантливой молодежи, жаждущей знаний и открытий.

Данное пособие предназначено для школьников 6–7 классов, которые делают первые шаги в познании этого огромного, полного приключений и неожиданностей, мира. Пособие состоит из трех глав: «Числа и действия с ними», «Уравнения и неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля», «Системы уравнений». Каждая глава состоит из разделов, которые включают справочный материал, задачи с полным решением и упражнения. К упражнениям приведены ответы. Задачи, которые приведены в пособии, взяты из разных источников, их библиографический список приведен в конце пособия.

Дорогие школьники! Приглашаем вас на олимпиады «МИСиС зажигает звезды» и другие олимпиады! Желаем вам больших успехов в познании нового!

## ВВЕДЕНИЕ

Для подготовки к олимпиаде по математике необходимо не только желание научиться новому и познать неизвестное, но и иметь запас знаний и умений, приводящих к правильному решению поставленной задачи.

Для понимания материала данного пособия приведем основные определения и условные обозначения, которые могут встретиться в тексте.

**1. Объединением** множеств A и B называется такое множество, обозначаемое $A \cup B$, состоящее из элементов множества A, или множества B, или элементов, принадлежащих множествам A и B. Геометрически объединение множеств A и B выглядит так, как показано на Рис. В1.

$A \cup B$

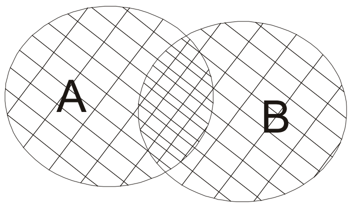


Рис. В1

**2. Пересечением** множеств A и B называется такое множество, обозначаемое $A \cap B$, которое состоит из элементов, принадлежащих и множеству A и множеству B. Изобразить пересечение множеств можно так, как показано на Рис. В2. Заштрихованная часть является пересечением множеств A и B.

$A \cap B$

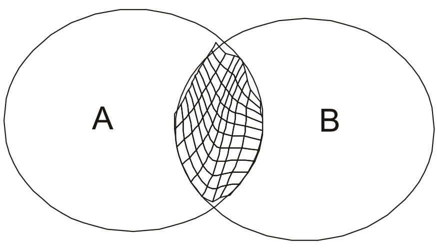


Рис. В2

**3.** Если множество не имеет ни одного элемента, то такое множество принято называть **пустым**, и обозначать символом $\varnothing$. Если множества A и B не пересекаются, то их пересечение есть пустое множество (см. Рис. В3).

$A \cap B = \varnothing$

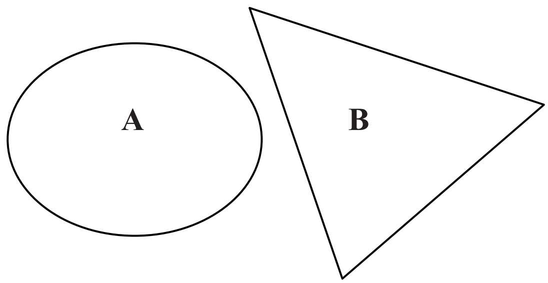


Рис. В3

**4. Координатная прямая** – это прямая, на которой выбраны: точка отсчета, называемая началом координат, единичный отрезок и направление. Направление на прямой выберем слева направо, на чертеже это указывается стрелкой на конце прямой (см. Рис. В4). Точку, которая выбирается в качестве начала отсчета, обозначим буквой O. Точка O делит координатную ось на две половины: правую и левую, где отмечаются положительные и отрицательные числа соответственно. Началу отсчета поставим в соответствие число нуль, справа на расстоянии единичного отрезка от точки O, поставим число 1, далее на расстоянии двух единичных отрезков от точки O – число 2, и т.д. С левой стороны от числа 0 на расстоянии масштабного отрезка поставим число –1, далее –2, и т.д. Тем самым будет задана координатная прямая. Число, которое показывает положение точки на прямой, называется её **координатой.**

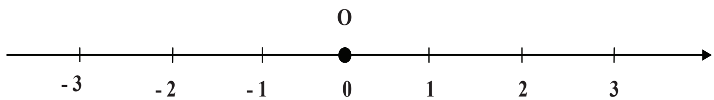


Рис. В.4

Например, запись O(0) означает, что точка O имеет координату 0; A(–2) – точка A имеет координату –2 (Рис. В5)

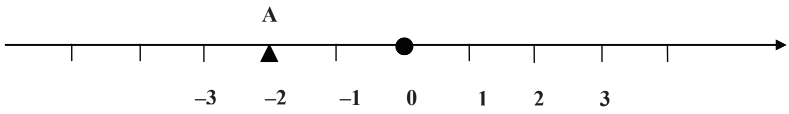


Рис. В5

Координатную прямую также называют **числовой прямой** (или **координатной осью**), так как каждой точке прямой поставлено в соответствие единственное действительное число. Двум различным точкам прямой соответствуют два отличных друг от друга числа.

**5. Координатной плоскостью** называется плоскость, на которой задана прямоугольная система координат (Рис. В6), состоящая из двух взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке $O$, называемой началом координат. Горизонтальная ось называется осью абсцисс (обозначается $Ox$), а вертикальная ось – осью ординат (обозначается $Oy$). На каждой координатной оси задается единичный отрезок. Вообще говоря, масштабные единичные отрезки на разных осях могут отличаться по длине, но в школьном курсе математики предполагается, что длина масштабного единичного отрезка одна и та же для осей $Ox$ и $Oy$. Впервые метод координат был изложен в книге «Геометрия» (1637) великого французского математика Рене Декарта (1596–1650), поэтому в его честь прямоугольная система координат и называется декартовой.

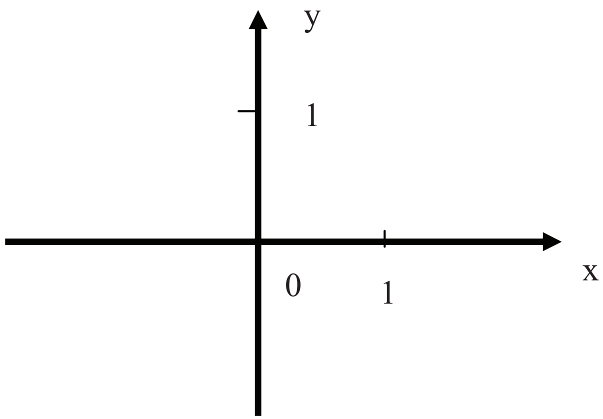


Рис. В6

**6.** В математике часто вместо слов применяют символы:

1) $\vee$ – или;

2) $\forall$- для любого, для каждого, любой, каждый;

3) $\{\ldots\}$ – множество;

4) $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ky=f \end{cases}$ – система уравнений, здесь $a,b,c,d,f,k$ – числа, $x$ и $y$ – переменные;

5) $\left[\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ky=f \end{array}\right.$ – совокупность уравнений, где $a,b,c,d,f,k$ – числа, $x$ и $y$ – переменные.

6) $\Leftrightarrow$ – равносильно, эквивалентно;

7) $\Rightarrow$ – следовательно.

Другие обозначения или термины, которые могут встретиться при чтении, будут разъяснены непосредственно в тексте пособия.

# 1. ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

## 1.1. Числа

Какие бывают числа? Числа бывают натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные.

**Натуральные числа** – это те числа, которые мы применяем при счете: 1;2;3;…. Обозначается множество натуральных чисел буквой *N*. С помощью математической символики множество натуральных чисел записывается так

$$N = \{1; 2; 3; ...\}.$$

Заметим, что число 0 не является натуральным числом.

Натуральные числа, им противоположные и число нуль образуют **множество целых чисел**, которое обозначается буквой Z:

$$Z = \{... - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}.$$

Множество рациональных чисел – это множество чисел вида $m/n$, где $m$ принадлежит множеству целых чисел, а $n$ – множеству натуральных чисел. Обозначается множество рациональных чисел буквой $Q$:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \ m \in Z, n \in N \right\}.$$

Вертикальная черта после дроби заменяет слова «таких, что» или «где».

Например, $\frac{1}{3}; 2\frac{1}{4}; \frac{5}{7}$ – рациональные числа, или рациональные дроби. Число, стоящее над разделительной чертой называется **числителем**, число, стоящее под чертой – **знаменателем** дроби. Если в знаменателе дроби стоит число 10 или любая степень числа 10, то такая дробь называется десятичной и записывается десятичная дробь так: $\frac{3}{10} = 0,3; \frac{27}{10^2} = \frac{27}{100} = 0,27.$

Однако, есть числа, которые не являются рациональными. Можно доказать, что к таким числам относятся, например, $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \pi \approx 3,14...$.

Эти числа нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$. Они называются **иррациональными** числами, а их множество обозначается буквой $J$.

Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел образует множество **действительных** (или **вещественных**) чисел, которое обозначается буквой $R$:

$$R = Q \cup J .$$

Множество действительных чисел $R$ геометрически можно представить в виде числовой прямой, так как любому действительному числу можно поставить в соответствие единственную точку на этой прямой. Двум разным действительным числам соответствуют две различные точки числовой прямой.

Можно записать такое включение $N \subset Z \subset Q \subset R$.

## 1.2. Арифметические действия с числами

Числа можно складывать, вычитать, умножать и делить. Пусть $a$ и $b$ действительные числа, тогда справедливы следующие соотношения:

1. $a + b = b + a$ (перестановочный закон относительно сложения, или свойство коммутативности: от перестановки мест слагаемых сумма не меняется);
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (сочетательный закон, или свойство ассоциативности);
3. $a \cdot b = b \cdot a$ (перестановочный закон относительно умножения);
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (сочетательный закон относительно умножения);
5. $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (распределительный закон, или свойство дистрибутивности).

Дробные числа заслуживают особого внимания, так как арифметические действия с ними подчиняются определенным правилам.

Пусть даны две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где $b \neq 0,\ d \neq 0$, тогда

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot d}{b \cdot d};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d};$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Дроби бывают **правильные** и **неправильные**. Если числитель строго меньше знаменателя, то дробь называется правильной. Если числитель дроби больше, либо равен знаменателю, то такая дробь называется неправильной, например, $\frac{5}{3}; \frac{7}{7}; \frac{28}{13}$ – неправильные дроби. Неправильную дробь можно представить в смешанном виде, т.е. в виде целой и дробной части. Например, $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}; \frac{7}{7}=1; \frac{28}{13}=2\frac{2}{13}$.

При решении примеров смешанные дроби лучше представлять в виде неправильных дробей и потом производить арифметические действия.

Например,

$$2\frac{2}{13}:3\frac{5}{26}=\frac{28}{13}:\frac{83}{26}=\frac{28}{13}\cdot\frac{26}{83}=\frac{28\cdot 2}{83}=\frac{56}{83}.$$

Напомним еще несколько полезных определений. Натуральное число называется **простым**, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число. Например, 2, 3, 5, 7, … – простые числа.

Натуральное число называется **составным**, если оно имеет более двух делителей. Например, 4 имеет делители 1; 2; 4, следовательно, 4 – составное число, 12 имеет делители 1; 2; 3; 4; 6; 12, поэтому также является составным.

Единица не является ни простым, ни составным числом.

Для **подсчета количества делителей** натурального числа *a* удобно применять следующую формулу: $m=(k_1+1)(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_n+1)$, где $k_1,k_2,\ldots,k_n$ – показатели степеней простых множителей разложения числа *a,* то есть $a=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$.

## 1.3. Задачи

**1.** Вычислите алгебраическую сумму: $1-2+3-4+\ldots+9-10$.

*Решение.* 1 способ. Для того чтобы вычислить данную сумму, заметим, что всего слагаемых 10 и каждая пара слагаемых в данной сумме равна –1, таких пар всего 5, поэтому искомая сумма равна –5.

2 способ. Можно заметить, что все нечетные числа в данной сумме имеют знак плюс, а все четные – знак минус. Сложим все нечетные числа и все четные числа по отдельности:

$$1+3+5+7+9=25, \quad 2+4+6+8+10=30 \Rightarrow 25-30=-5.$$

*Ответ:* –5.

*Пояснение.* Целое число называется четным, если оно делится без остатка на два. Нечетное число – это число, которое при делении на два имеет остаток, равный единице. Общая формула четного числа $2k$, $k \in Z$, формула нечетного числа $2k+1$, $k \in Z$.

**2.** Найдите сумму чисел: $2+4+6+...+100$.

*Решение.* Из каждого слагаемого суммы можно вынести множитель 2, тогда

$$2+4+6+...+100=2\cdot(1+2+3+....+50)$$

и осталось найти сумму $1+2+3+....+50$. Эту сумму найдем так: запишем в обратном порядке эту сумму и подпишем её под первой суммой. Тогда видно, что сумма чисел, стоящих в столбике равна 51, таких слагаемых 50, поэтому

$$\begin{array}{l} 1 \quad +2 \quad +3 \quad +...+50 \\ +50+49+48+...+1 \\ \hline 51+51+51+...+51=51\cdot 50. \end{array}$$

Следовательно, искомая сумма может быть вычислена так

$$2+4+6+...+100=2\cdot(1+2+3+....+50)=2\cdot 51\cdot 50:2=51\cdot 50=2550.$$

*Ответ:* 2550.

Согласно легенде, маленький Карл Фридрих Гаусс вычислил сумму чисел от 1 до 100 за несколько минут, заметив, что сумма первого и последнего числа равна сумме второго и предпоследнего числа и т.д. Все суммы равны 101 и их всего 50. Поэтому сумма от 1 до 100 равна $101\cdot 50=5050$. Карл Фридрих Гаусс (1777–1855 гг.) – немецкий математик, который считается одним из величайших математиков всех времен.

**3.** Докажите, что сумма четного и нечетного числа есть нечетное число.

*Доказательство.* Пусть число $a$ – четное число, число $b$ – нечетное число.

Тогда $a = 2k,\ b = 2l + 1$, где $k \in Z,\ l \in Z$. Сумма этих чисел есть нечетное число, так как

$$a + b = 2k + 2l + 1 = 2(k + l) + 1 = 2m + 1,\ m \in Z .$$

Что и требовалось доказать.

**4.** Докажите, что произведение двух нечетных чисел есть число нечетное.

*Доказательство.* Пусть даны два нечетных числа, которые можно представить в виде $a = 2k + 1$ и $b = 2m + 1$, где $k \in Z$ и $m \in Z$. Найдем произведение этих чисел

$$ab = (2k + 1) \cdot (2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1 ,$$

т.е. получаем нечетное число. Что и требовалось доказать.

**5.** Вычислите: $2 \cdot \left(3\frac{1}{5} - 2\frac{3}{8}\right) - 3 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{7}{12}\right)$.

*Решение.* Данный пример можно решить стандартным способом, выполняя все действия по этапам. А можно вычислить, используя свойства операций сложения и умножения, которые были приведены выше.

$$2 \cdot \left(3\frac{1}{5} - 2\frac{3}{8}\right) - 3 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{7}{12}\right) = 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{5} - 2 - \frac{3}{8}\right) - \left(\frac{6}{5} + \frac{21}{12}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{5} - \frac{3}{8}\right) - \left(\frac{6}{5} + \frac{7}{4}\right) = \left(2 + \frac{2}{5} - \frac{6}{8}\right) - \left(\frac{6}{5} + \frac{7}{4}\right) =$$

$$= \left(2 + \frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{6}{5} + \frac{7}{4}\right) = 2 + \frac{2}{5} - \frac{3}{4} - \frac{6}{5} - \frac{7}{4} = 2 - \frac{4}{5} - \frac{10}{4} =$$

$$= 2 - \frac{4}{5} - \frac{5}{2} = \frac{20 - 8 - 25}{10} = \frac{-13}{10} = -1{,}3.$$

*Ответ:* –1,3.

**6.** Вычислите: $\left(2\frac{1}{3} - 4\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{16} - \frac{2}{3}\right) : \frac{55}{192} - \left(3{,}75 - 1\frac{2}{3}\right) \cdot (1{,}25 + 0{,}67)$.

*Решение.* Этот пример лучше решать, выполняя все действия по этапам.

$$2\frac{1}{3}-4\frac{5}{6}=2+\frac{1}{3}-4-\frac{5}{6}=-2+\frac{2-5}{6}=-2-\frac{3}{6}=-2\frac{1}{2}=-\frac{5}{2};$$

$$\frac{7}{16}-\frac{2}{3}=\frac{7\cdot 3-2\cdot 16}{48}=\frac{21-32}{48}=-\frac{11}{48};$$

$$\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{11}{48}\right):\frac{55}{192}=\frac{5\cdot 11}{2\cdot 48}:\frac{55}{192}=\frac{5\cdot 11}{2\cdot 48}\cdot\frac{192}{55}=2;$$

$$3,75-1\frac{2}{3}=3+\frac{3}{4}-1-\frac{2}{3}=2+\frac{3\cdot 3-2\cdot 4}{12}=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12};$$

$$1,25+0,67=1,92=1\frac{92}{100}=1\frac{23}{25}=\frac{48}{25};$$

$$\frac{25}{12}\cdot\frac{48}{25}=4;$$

$$2-4=-2.$$

*Ответ:* –2.

**7.** Найдите наибольший общий делитель чисел 1326 и 390.

**Наибольшим общим делителем** (НОД) двух натуральных чисел называется наибольшее число, на которое без остатка делится каждое из этих чисел. Для того чтобы найти наибольший общий делитель нужно:

1) разложить каждое число на простые множители;

2) из полученных разложений выписать одинаковые множители, затем перемножить их;

3) полученное число является наибольшим общим делителем.

*Решение.* 1 способ. Разложим числа 1326 и 390 на простые множители:

$$1326=2\cdot 3\cdot 13\cdot 17,\ 390=2\cdot 3\cdot 5\cdot 13\Rightarrow НОД(1326;390)=2\cdot 3\cdot 13=78.$$

*Ответ:* 78.

Эту задачу можно решить с помощью **алгоритма Евклида**, который заключается в следующем: сначала большее число делится на меньшее. Далее меньшее число делится на остаток от деления большего числа на меньшее. Этот процесс продолжается, пока в остатке от деления не получится нуль. Тогда последний ненулевой остаток и есть наибольший общий делитель этих чисел.

2 способ. Разделим число 1326 на 390, получим

$$1326 = 390 \cdot 3 + 156\,,$$

теперь 390 разделим на остаток 156:

$$390 = 156 \cdot 2 + 78\,,$$

далее 156 разделим на 78:

$$156 = 78 \cdot 2\,.$$

Как видим, 156 разделилось на 78 без остатка, следовательно, число 78 (последний ненулевой остаток от деления) и есть наибольший общий делитель.

*Ответ:* 78.

**8.** Найдите наименьшее общее кратное чисел 210 и 126.

**Наименьшим общим кратным** (НОК) двух натуральных чисел называется наименьшее число, которое делится без остатка на каждое из этих чисел. Для того чтобы найти НОК нужно:

1) разложить числа на простые множители;

2) записать разложение на простые множители одного из чисел;

3) умножить это число на недостающие простые множители из разложения другого числа;

4) полученное число и есть наименьшее общее кратное.

*Решение.* Числа 210 и 126 разложим на простые множители

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,\ 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7\,.$$

Тогда $\text{НОК}(210;126) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 630$.

*Ответ:* 630.

**9.** Решите ребус

$$\begin{array}{r} \text{У Д А Р} \\ +\ \underline{\text{У Д А Р}} \\ \text{Д Р А К А} \end{array}$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам соответствуют разные цифры. При решении таких задач необходимо рассматривать все возможные случаи.

*Решение.* Чтобы решить любой ребус нужно внимательно проанализировать все элементы, заданные в условии. В данной задаче нужно сложить два одинаковых четырехзначных числа, сумма этих чисел есть пятизначное число. Следовательно, можно сделать вывод, что буква Д – это цифра 1, т.к. увеличение разряда числа возможно тогда, когда сумма цифр не меньше 10. Если Д – единица, то А – это 2 = 1 + 1, и тогда сумма Р+Р заканчивается цифрой 2. Это возможно в случае, когда Р = 6 или когда Р = 1, но одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, поэтому этот случай отпадает, т.к. уже Д = 1. Следовательно, У есть цифра 8. Итак, получается, что УДАР = 8126, ДРАКА = 16252.

**10.** Решите ребус

$$\begin{array}{r} ONE \\ ONE \\ +\,ONE \\ \underline{ONE} \\ FOUR \end{array}$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам соответствуют разные цифры. Рассмотрите все возможные случаи.

*Решение.* Отправной точкой является столбик с буквами О. Буква О складывается четыре раза и в результате получается снова буква О. Цифра 0 отпадает, т.к. трехзначное число не может начинаться с цифры 0. Переберем случаи, когда сложение четырех одинаковых цифр разряда сотен и числа единиц из разряда десятков будет заканчиваться цифрой, зашифрованной буквой О. Так как в ответе получается четырехзначное число, поэтому вместо буквы О могут быть цифры 3, или 6, или 9. (Подумайте, почему цифры 2; 5; 7; 8 отпадают?) Рассмотрим случай с цифрой 3. Если О – это цифра 3, то в результате четырехкратного сложения 3 получим число 12. До числа 3 в разряде сотен исходного числа не хватает единицы, которая должна придти из разряда десятков. Эта единица может быть получена тогда и только тогда, когда в качестве N будут взяты цифры или 3, или 4. Но цифра 3 не может быть взята, так как уже О – это 3. Поэтому остается только случай, когда N – это 4. Какой цифрой может быть буква Е? Здесь также ответ неоднозначный. Проверяем все цифры, начиная с нуля. Нуль не может быть буквой Е, так как после четырехкратного сложения этой буквы получена другая буква R (т.е. другая цифра). Единица также отпадает, так как сложение четырех троек приводит к появлению 1 в разряде тысяч, а там стоит другая буква, т.е. другая цифра. Возьмем цифру 2, тогда получим число 342 и в ответе 1368, которое удовлетворяет всем условиям ребуса. Цифры 3 и 4 не подходят, т.к. это цифры числа сотен и десятков. Берем цифру 5. Тогда число будет 345, а результат 1380. Данный ответ также является решением ребуса. Цифры 6, 7 и 9 не удовлетворяют условию (подумайте, почему?). Остается цифра 8, для которой получаем число 348, а сумма равна 1392. Эта комбинация цифр также является решением ребуса. Но это только часть решения ребуса, т.к. необходимо рассмотреть ещё случаи, когда в качестве буквы О будут стоять цифры 6 или 9. Рассуждая аналогичным образом, получите самостоятельно все остальные ответы.

*Ответ:* ONE = {342; 345; 348; 651; 652; 981; 985}.

Как видно из этой задачи, решений может быть много.

**11.** Найдите координаты точки *K*, которая симметрична точке *A*(5) относительно точки *B*(–2).

*Решение.* Эту задачу можно решить графически. Построим числовую прямую, на которой отметим точки *A*(5) и *B*(–2). Далее от точки *B*(–2) влево по координатной прямой отложим отрезок, длина которого равна длине отрезка *BA*. Точка, которая является концом отложенного отрезка и есть искомая точка *K*. (Рис.1.1.)

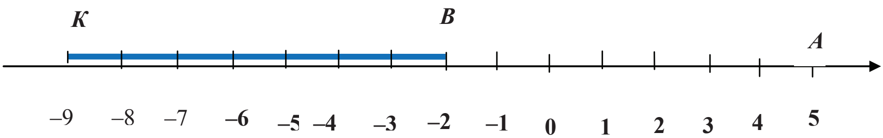


Рис. 1.1

Т.е. точка *K* имеет координату –9.

*Ответ:* *K*(–9).

Эту задачу можно решить аналитическим способом. Длина отрезка *BA* равна 5–(–2) = 7 (чтобы найти длину отрезка нужно из координаты конца отрезка вычесть координату начала отрезка). Точка, симметричная точке *A*, относительно точки *B* находится на расстоянии, равном расстоянию *BA*, но только с другой стороны (слева) относительно точки *B* на координатной прямой. Поэтому для нахождения координаты точки *K* нужно решить уравнение

$$-2 - x = 7 \Leftrightarrow x = -2 - 7 \Leftrightarrow x = -9.$$

Следовательно, *K*(–9).

*Ответ:* *K*(–9).

**12.** Вычислите: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$.

*Решение.* Если складывать эти дроби по очереди, то это будет утомительно и нудно (это можно сделать для проверки своего терпения и внимания). Мы поступим следующим образом. Заметим, что в знаменателях дробей стоят произведения двух последовательных чисел $1\cdot 2;\ 2\cdot 3;\ 3\cdot 4;\ ...,9\cdot 10$. Тогда каждую дробь можно представить в следующем виде

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2};\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};...,\frac{1}{72}=\frac{1}{8\cdot 9}=\frac{1}{8}-\frac{1}{9};\frac{1}{90}=\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}.$$

Подставляя вместо дробей их представления в виде разности, получим

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}=$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=$$

$$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=1+1-\frac{1}{10}=2-\frac{1}{10}=1\frac{9}{10}=1{,}9.$$

*Ответ:* 1,9.

**13.** Найдите на числовой прямой точку *M*, делящую отрезок *AB* в отношении 5:3, считая от точки *A*, если известно, что *A*(–3), *B*(13).

Будем говорить, что точка *M* делит отрезок *AB* в отношении *k*, если выполнено следующее соотношение $\frac{AM}{MB}=k$.

*Решение.* 1 способ.

Длина отрезка *AB* равна 13–(–3) = 16 (из координаты конца отрезка вычитаем координату начала отрезка).

Точка *M* делит отрезок *AB* в отношении 5:3, то есть отрезок *AM* состоит из 5 частей, а отрезок *MB* – из 3 частей, всего – 8 частей.

Разделим длину отрезка *AB* на 8 частей, тогда будет найдена длина одной части: 16:8 = 2.

Отрезок *AM* состоит из 5 частей, следовательно, имеет длину 5·2 = 10.

Для нахождения координаты точки *M* нужно к координате точки *A* прибавить длину отрезка *AM*, то есть –3+10 = 7. (Если определять координату точки $M$ от конца отрезка $AB$, то нужно от координаты точки $B$ отнять длину отрезка $MB$, который равен $3\cdot 2 = 6$. То есть $13-6 = 7$). Итак, $M(7)$.

*Ответ:* $M(7)$.

2 способ. Эту задачу можно решить алгебраическим способом. Пусть точка $M$ имеет координату $x$. Тогда длины отрезков $AM$ и $MB$ могут быть выражены через координату точки $M$ следующим образом: $AM = x-(-3) = x+3$, $MB = 13-x$. Так как точка $M$ делит отрезок $AB$ в отношении 5:3, то выполняется соотношение $\frac{AM}{MB}=\frac{5}{3}$, то есть $\frac{x+3}{13-x}=\frac{5}{3}$. Решая это уравнение, получим

$$3(x+3) = 5(13-x)$$

$$3x+9 = 65-5x$$

$$8x = 56$$

$$x = 7\ .$$

Получаем, что $M(7)$.

*Ответ:* $M(7)$.

## 1.4. Упражнения

**1.** Вычислите: $\left(2\frac{2}{3}+1\frac{5}{8}\right):\frac{3}{5}-7\frac{1}{36}+\frac{7}{8}$.

**2.** Вычислите: $\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot 2\frac{1}{4}-1\frac{1}{12}\right):\frac{7}{180}$.

**3.** Вычислите: $\dfrac{\left(2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}\right):0,5}{\left(1,2-0,8\right)\cdot 5+\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{3}+1,2\right):\frac{1}{30}$.

**4**. Вычислите: $\dfrac{3\frac{1}{3}+5\frac{1}{12}-\left(2\frac{7}{12}-4\frac{2}{3}\right)}{\left(7,25-\frac{3}{4}\right):0,25-1}:0,07$.

**5.** Найдите сумму чисел: $1+3+5...+99$.

**6.** Вычислите: $1 + 2 + 3 + ... + 50$.

**7.** Вычислите: $1 - 2 + 3 - 4 + ... + 49 - 50$.

**8.** Докажите, что
1) сумма двух четных чисел есть число четное;
2) сумма двух нечетных чисел есть число четное;
3) произведение двух четных чисел есть число четное.

**9.** Решите ребус

$$\begin{array}{r} \text{К Р О С С} \\ +\,\text{К Р О С С} \\ \hline \text{С П О Р Т} \end{array}$$

**10.** Найдите координаты точки *M*, которая симметрична точке *L*(–3) относительно точки *C*(2).

**11.** На числовой прямой указать точку *T*, симметричную точке *A*(–2) относительно точки *B*(5). Чему равна длина отрезка *AT*?

**12.** Сколько общих делителей имеют числа 126 и 36?

**13.** Вычислите: $\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(2,4-8\frac{2}{5}\right)$.

**14.** На координатной прямой поставлены точки *A*(–5), *B*(–1) и *C*(7). Во сколько раз отрезок *AC* длиннее отрезка *AB*?

**15.** Найдите на числовой прямой точку *M*, делящую отрезок *AB* в отношении 3:4, если известно, что *A*(–12), *B*(9).

**16.** Известно, что точка *K*(3) делит отрезок *AC* в отношении 2:3. Какую координату имеет точка *C*, если точка *A* имеет координату –5?

# 2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ НЕИЗВЕСТНОЕ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

В этой главе мы рассмотрим основные методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля.

## 2.1. Уравнения

**Модулем**, или **абсолютной величиной**, числа $a$ называется само число $a$, если $a \geq 0$, и $-a$, если $a<0$; обозначается модуль числа $a$ так: $|a|$, то есть по определению

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения, модуль числа $|a|$ – это расстояние от начала координат до точки $a$.

Например, $|3| = 3$ означает, что расстояние от 0 до числа 3 равно 3. Часто расстояние обозначается греческой буквой ρ (читается «ро»). (Рис. 2.1)

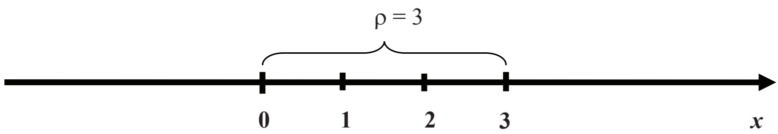


Рис. 2.1

Запись $|-4| = 4$, означает, что расстояние от начала отсчета до точки с координатой –4 равно 4. (Рис. 2.2)

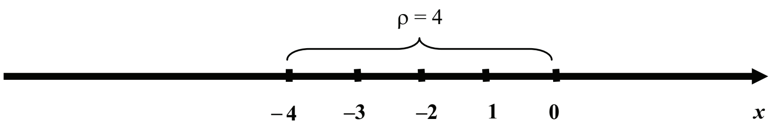


Рис. 2.2

### Свойства модуля

1. $|a| \geq 0$, причем $|a| = 0$, тогда и только тогда, когда $a = 0$;
2. $|-a| = |a|$;
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$;
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$;
6. $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$.

Алгебраическое уравнение с одним неизвестным $x$ называется **линейным**, если оно имеет вид $ax + b = 0$, где $a \in R, b \in R, a \neq 0$. **Решением** или **корнем** уравнения называется число, которое обращает уравнение в верное равенство.

**Решить уравнение** означает найти множество всех его решений или доказать, что решений нет.

Для линейного уравнения с одним неизвестным решением является число $x = -\frac{b}{a}$.

Рассмотрим уравнение вида $|x - a| = b$.

По определению – модуль числа есть неотрицательное число, поэтому, данное уравнение будет иметь решение только в случае, когда $b \geq 0$. Следовательно, решения уравнения можно найти из следующих двух уравнений:

$x - a = b$ или $x - a = -b$, откуда следует, что

$x = b + a$ или $x = -b + a$.

Итак, сделаем вывод: уравнение, содержащее под знаком модуля неизвестное,

1) при $b < 0$ не имеет решений;

2) при $b = 0$ имеет единственное решение $x = a$;

3) при $b > 0$ имеет два решения $x = b + a$ или $x = -b + a$.

Почему получилось два решения уравнения при $b > 0$? На этот вопрос можно ответить, если вспомнить геометрический смысл модуля числа. В случае, когда решается уравнение, нужно найти точки, расположенные от точки $a$ на расстоянии, равном $b$. А таких точек будет две: слева и справа от точки $a$ (Рис. 2.3). Поэтому мы и получили два ответа.

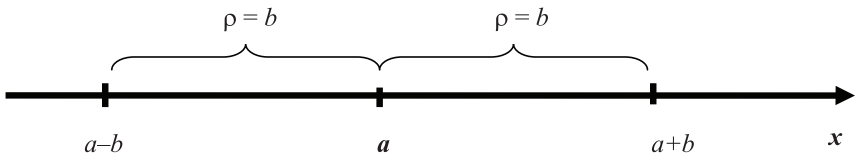


Рис. 2.3

Интересны случаи, когда уравнение содержит два или несколько модулей. Принцип решения таких уравнений одинаков и сводится к следующим действиям:

1) сначала надо определить точки, в которых модули обращаются в нуль;

2) нарисовать столько координатных прямых, сколько модулей входит в уравнение;

3) расставить на координатных прямых точки, в которых модули обращаются в нуль;

4) на каждом интервале определить знак соответствующего выражения, стоящего под модулем;

5) на каждом полученном интервале решить исходное уравнение;

6) совокупность всех полученных решений и является решением исходного уравнения.

*Замечание.* Пункты 2),3) можно заменить таблицей, в которую будут внесены знаки соответствующих выражений, стоящих под знаком модуля.

В пункте 2.3. мы разберем такие примеры.

## 2.2. Неравенства

Для решения неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, будем использовать четыре опорных неравенства:

1) $|x| < b \Leftrightarrow -b < x < b$ ; в виде интервалов решение данного неравенства имеет вид $x \in (-b;b)$ (Рис. 2.4);


Рис. 2.4

2) $|x| > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > b \\ x < -b \end{array}\right.$, или $x \in (-\infty; -b) \cup (b; +\infty)$; (Рис. 2.5)


Рис. 2.5

*Пояснение к обозначениям.* Квадратная скобка, содержащая два неравенства, указывает на совокупность неравенств, то есть на объединение получаемых решений для каждого неравенства, входящего в эту совокупность.

Фигурная скобка, содержащая два или несколько неравенств, указывает на систему неравенств. Решением такой системы является пересечение множеств решений каждого неравенства, входящего в систему, другими словами, это такое множество решений, которое одновременно удовлетворяет всем неравенствам, входящим в систему неравенств.

3) $|x| \le b \Leftrightarrow -b \le x \le b$, или $x \in [-b; b]$; (Рис. 2.6)


Рис. 2.6.

4) $|x| \ge b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge b \\ x \le -b \end{array}\right.$, или $x \in (-\infty; -b] \cup [b; +\infty)$ (Рис. 2.7)

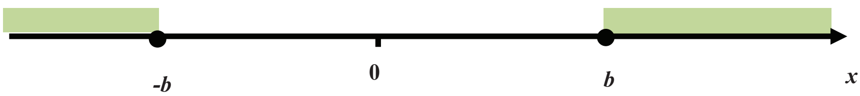


Рис. 2.7

Эти неравенства помогут в решении более сложных неравенств, содержащих знак модуля.

Обратите внимание на концы (граничные точки) интервалов. В пунктах 1) и 2) они светлые («пустые»). Это означает, что граничные точки не входят в решение неравенства, то есть интервал не содержит эти точки. Чтобы показать это, в записи используют круглые скобки $x \in (-b; b)$ или $x \in (-\infty; -b) \cup (b; +\infty)$.

В пунктах 3) и 4) граничные точки темные (закрашенные), это означает, что концы интервалов являются решениями неравенства и входят в множество решений неравенства. Для записи этого факта используют квадратные скобки $x \in [-b; b]$ или $x \in (-\infty; -b] \cup [b; +\infty)$.

## 2.3. Задачи

**1.** Решите уравнение $|x-7| = 6$.

*Решение.* Уравнение распадается на два уравнения $x-7=-6$ или $x-7=6$, решая которые, получаем

$x-7=-6 \Leftrightarrow x=-6+7 \Leftrightarrow x=1$ или

$x-7=6 \Leftrightarrow x=6+7 \Leftrightarrow x=13$.

С геометрической точки зрения решение может представлено так (Рис. 2.9)

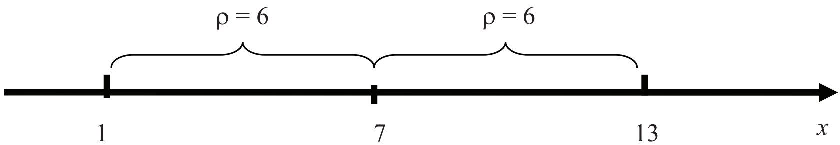


Рис. 2.8

*Ответ:* 1;13.

**2.** Решите уравнение $\dfrac{|x-3|}{15} + \dfrac{1}{5} = 4$.

*Решение.* Сначала преобразуем уравнение, умножив его на 15. Напомним, что при умножении уравнения на число, отличное от нуля, получается равносильное уравнение. Тогда

$$|x-3|+3=60 \Leftrightarrow |x-3|=57 \Leftrightarrow (x-3=57 \vee x-3=-57) \Leftrightarrow (x=60 \vee x=-54).$$

*Ответ:* –54; 60.

Следует иметь в виду, если вы угадали корень уравнения, то это не означает, что вы решили задачу. Для завершения решения задачи необходимо доказать, что других решений нет.

**3.** Решите уравнение $|x-2| = x+3$.

*Решение.* В точке $x=2$ модуль обращается в нуль, построим числовую прямую, отметим на ней точку $x=2$ и определим знаки выражения ($x-2$) на полученных интервалах (Рис. 2.9)

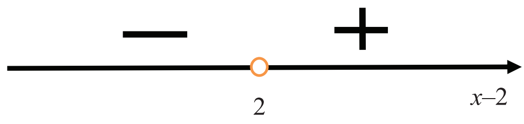


Рис. 2.9

Теперь на каждом полученном интервале решим уравнение.

1) $x \in (-\infty; 2)$, на этом интервале модуль раскрывается со знаком минус и уравнение принимает вид

$$-x+2 = x+3$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Полученное значение $x$ принадлежит рассматриваемому интервалу, следовательно, это число является корнем данного уравнения.

2) $x \in [2; +\infty)$, тогда

$x-2 = x+3$, но это уравнение не имеет решений.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{1}{2}$.

*Ответ:* $-\frac{1}{2}$.

**4.** Решите уравнение $|x+3|-|x-2|+|7-x|=12$.

*Решение.* В точках $x=-3; x=2; x=7$ модули обращаются в нуль. Составим таблицу (Табл. 2.1.), в которую внесем знаки выражений, стоящих под знаком модуля:

*Таблица 2.1.*

| | $(-\infty;-3)$ | $(-3;2)$ | $(2;7)$ | $(7;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $7-x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ |

На каждом интервале найдем решение исходного уравнения.

1) $x\in(-\infty;-3)$, тогда

$$-x-3+x-2+7-x=12$$

$$2-x=12$$

$$x=-10.$$

Полученное число принадлежит рассматриваемому интервалу, следовательно, является решением уравнения.

2) $x\in[-3;2)$, тогда, с учетом знаков, получим

$$|x+3|-|x-2|+|7-x|=12$$

$$x+3+x-2+7-x=12$$

$$x+8=12$$

$$x=4.$$

Однако число 4 не принадлежит рассматриваемому интервалу, поэтому 4 не является корнем уравнения.

3) $x\in[2;7)$, тогда

$$x+3-x+2+7-x=12$$

$$-x+12=12$$

$$x=0.$$

Полученный ответ не принадлежит $[2;7)$, следовательно, 0 не является корнем исходного уравнения.

4) $x \in [7;+\infty)$, тогда

$$x+3-x+2-7+x=12$$

$$x-2=12$$

$$x=14.$$

Число $14 \in [7;+\infty)$, поэтому 14 – решение уравнения.

Итак, мы рассмотрели все возможные случаи. Решением данного уравнения являются числа –10 и 14.

*Ответ:* –10; 14.

Проконтролировать правильность решений можно непосредственной подстановкой полученных ответов в исходное уравнение.

**5.** Решите уравнение $|5-x|+|8-x|=3$.

*Решение.* В точках 5 и 8 модули равны нулю. Составим таблицу знаков для выражений, стоящих под знаком модуля на соответствующих промежутках (Табл. 2.2.).

*Таблица 2.2.*

| | $(-\infty;5)$ | $(5;8)$ | $(8;+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $5-x$ | + | – | – |
| $8-x$ | + | + | – |

1) $x \in (-\infty;5)$,

$$5-x+8-x=3$$

$$-2x=-10$$

$x=5$, но $5 \notin (-\infty;5)$ ,следовательно, здесь решений нет.

2) $x \in [5;8)$,

$$-5+x+8-x=3$$

$$3=3.$$

Мы получили верное равенство, следовательно, любая точка рассматриваемого интервала является решением исходного уравнения, то есть $x \in [5;8)$.

3) $x \in [8;+\infty)$,

$$-5 + x - 8 + x = 3$$

$$2x = 16$$

$$x = 8.$$

Число 8 является решением уравнения. Объединяя решения, получим отрезок $[5;8]$.

*Ответ:* $[5;8]$.

Как видно из этого примера, решением уравнения, содержащего переменную под знаком модуля, может являться множество точек отрезка.

**6.** Решите уравнение $\left|\left||2x-3|-2\right|-5\right| = 3$.

*Решение.* Последовательно раскроем модули, начиная с внешнего.

$$\left[\begin{array}{l} \left||2x-3|-2\right|-5=-3 \\ \left||2x-3|-2\right|-5=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left||2x-3|-2\right|=2 \\ \left||2x-3|-2\right|=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2x-3|-2=2 \\ |2x-3|-2=-2 \\ |2x-3|-2=8 \\ |2x-3|-2=-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2x-3|=4 \\ |2x-3|=0 \\ |2x-3|=10 \\ |2x-3|=-6,\ \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=-4 \\ 2x-3=4 \\ 2x-3=0 \\ 2x-3=-10 \\ 2x-3=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-1 \\ 2x=7 \\ 2x=3 \\ 2x=-7 \\ 2x=13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-0,5 \\ x=3,5 \\ x=1,5 \\ x=-3,5 \\ x=6,5 \end{array}\right. .$$

*Ответ:* $-0,5; -3,5; 1,5; 3,5; 6,5$.

**7.** Решите уравнение $\dfrac{2}{|x-3|} = 3$.

В этом уравнении переменная *x* находится в знаменателе дроби. Поэтому знаменатель не может обращаться в нуль, иначе уравнение теряет смысл. Те значения переменной *x*, при которых уравнение (или любое другое алгебраическое выражение) имеет смысл, называются допустимыми значениями, а совокупность всех допустимых значений называется областью допустимых значений (ОДЗ).

*Решение.* Областью допустимых значений исходного уравнения является множество действительных чисел, за исключением точки $x = 3$. Символически это можно записать так: ОДЗ: $x \neq 3$.

$$\frac{2}{|x-3|}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3|=\dfrac{2}{3} \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-3=\dfrac{2}{3} \\ x-3=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\dfrac{2}{3}=\dfrac{11}{3} \\ x=2\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3} \end{array}\right. .$$

*Ответ:* $\frac{7}{3};\frac{11}{3}$.

**8.** Решите неравенство $|x-6| \leq 7$.

*Решение.* $-7 \leq x-6 \leq 7 \Leftrightarrow -7+6 \leq x \leq 7+6 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 13$, то есть $x \in [-1;13]$.

*Ответ:* $x \in [-1;13]$.

**9.** Решите неравенство $|x+4| > 6$.

*Решение.* $\left[\begin{array}{l} x+4>6 \\ x+4<-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;-10) \cup (2;+\infty)$.

*Ответ:* $x \in (-\infty;-10) \cup (2;+\infty)$.

**10.** Решите неравенство $|x-2|-|x+3| \leq 7$.

*Решение.* В точках $x=2, x=-3$ модули обращаются в нуль. Определим интервалы знакопостоянства выражений, стоящих под знаком модуля (Рис. 2.10).

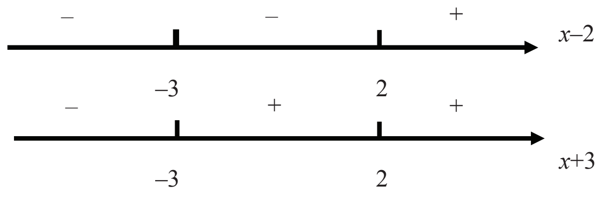


Рис. 2.10

1) $\begin{cases} x < -3 \\ -x+2+x-3 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -1 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3;$

2) $\begin{cases} -3 \le x < 2 \\ -x+2-x-3 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x < 2 \\ -2x \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x < 2 \\ x \ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x < 2;$

3) $\begin{cases} x \ge 2 \\ x-2-x-3 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ -5 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2;$

Объединяя все полученные решения, получаем ответ $x \in R$.

*Ответ:* $x \in R$.

**11.** Решите неравенство $|x-2|+|x-5| \le 4$.

*Решение.*

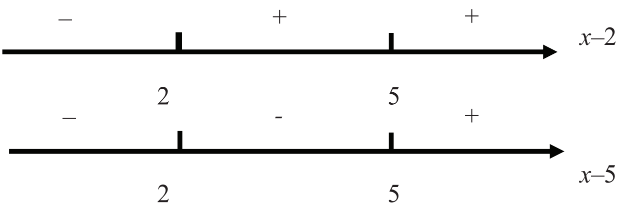


Рис. 2.11

1) $\begin{cases} x < 2 \\ -x+2-x+5 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ -2x \le -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \ge 5,5 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;$

2) $\begin{cases} 2 \le x < 5 \\ x-2-x+5 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x < 5 \\ 3 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x < 5;$

3) $\begin{cases} x \ge 5 \\ x-2+x-5 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ 2x \le 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ x \le 5,5 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \le x \le 5,5;$

4) Объединим все решения неравенства $[2;5) \cup [5;5,5] = [2;5,5]$.

*Ответ:* $x \in [2;5,5]$.

**12.** Решите неравенство $|x-3|+|4-x| \le x+7$.

*Решение.*

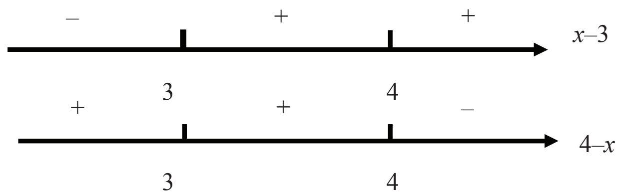


Рис. 2.12

1) $\begin{cases} x<3 \\ -x+3+4-x \le x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ -3x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x < 3;$

2) $\begin{cases} 3 \le x < 4 \\ x-3+4-x \le x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x < 4 \\ x \ge -6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le x < 4;$

3) $\begin{cases} x \ge 4 \\ x-3-4+x \le x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ x \le 14 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le x \le 14;$

4) $[0;3) \cup [3;4) \cup [4;14] = [0;14]$.

*Ответ:* $x \in [0;14]$.

**13.** Решите неравенство $\dfrac{|x+3|-x}{x} < 3$.

*Решение.* Перенесем тройку из правой части неравенства в левую. Преобразуем выражение:

$$\frac{|x+3|-x}{x} < 3 \Leftrightarrow \frac{|x+3|-x}{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{|x+3|-x-3x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{|x+3|-4x}{x} < 0.$$

Определим промежутки, где выражение, стоящее под знаком модуля сохраняет знак (Рис. 2.13).

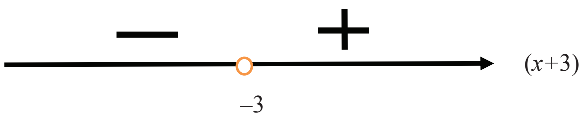


Рис. 2.13

1) $\begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{-x-3-4x}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{-5x-3}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{5x+3}{x} > 0 \end{cases}$

Заметим, что смысл второго неравенства последней системы изменен на противоположный (то есть знак «<», заменен на «>»). Это связано со свойствами числовых неравенств: если неравенство умножить или разделить на отрицательное число, то смысл неравенства меняется на противоположный.

Для решения последней системы неравенств будем руководствоваться следующими соображениями: согласно первому неравенству $x < -3$, следовательно, $x<0$, тогда выполнение второго неравенства возможно только тогда, когда выражение, стоящее в числителе также будет отрицательным, то есть

$$5x+3<0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{5},$$

и тогда $\begin{cases} x < -3 \\ x < -\dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x < -3$.

2) $\begin{cases} x \geq -3 \\ \dfrac{x+3-4x}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \dfrac{-3x+3}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \dfrac{3(x-1)}{x} > 0 \end{cases}$.

Чтобы найти решение этой системы неравенств, сначала разберем, как решить второе неравенство. Деление второго неравенства на положительное число 3 не меняет смысла неравенства, поэтому можно решить неравенство $\dfrac{x-1}{x} > 0$. Для решения найдем нули числителя и знаменателя: числитель обращается в нуль в точке $x = 1$, а знаменатель равен нулю в точке $x = 0$. На числовой прямой отметим эти точки, и определим знаки, которые будет иметь выражение $\dfrac{x-1}{x}$ на полученных интервалах. Промежуток, на котором данное выражение положительно, является решением этого неравенства. Так как неравенство строгое, поэтому граничные точки не входят в множество решений неравенства (Рис. 2.14).

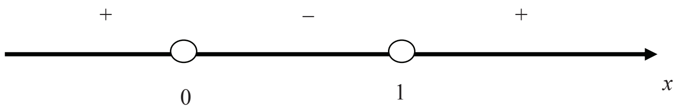


Рис. 2.14

Может возникнуть вопрос, каким образом ставятся знаки на полученных промежутках? Исходя из определения числовой прямой, числа стоящие правее больше чисел, которые находятся левее на числовой прямой. Поэтому на промежутке правее единицы числитель и знаменатель больше единицы, а значит, больше нуля (положительные числа), следовательно, их отношение также больше нуля, то есть положительно. В промежутке между нулем и единицей числитель дроби меньше нуля, а знаменатель больше нуля, но тогда, отношение отрицательного числа к положительному есть число отрицательное, то есть на промежутке от 0 до 1 данная дробь имеет знак минус. На промежутке $(-\infty;0)$ и числитель, и знаменатель принимают отрицательные знаки, следовательно, их отношение есть число положительное, поэтому ставим знак плюс. Для решения неравенства выбираем промежутки, где выражение $\dfrac{x-1}{x}$ положительно: $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$. Вернемся к нашей системе неравенств. Итак, мы получили

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-3;0\right) \cup (1;+\infty).$$

Объединяя решения пунктов 1) и 2)

$$(-\infty;-3) \cup \left[-3;0\right) \cup (1;+\infty) = (-\infty;0) \cup (1;+\infty),$$

получим окончательное решение исходного неравенства:

$$x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty).$$

*Ответ:* $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.

**14.** Решите неравенство $\dfrac{2x-|x-2|}{x+1}<3$.

*Решение.*

$$\frac{2x-|x-2|}{x+1}<3 \Leftrightarrow \frac{2x-|x-2|}{x+1}-3<0 \Leftrightarrow \frac{2x-|x-2|}{x+1}-3<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-|x-2|-3x-3}{x+1}<0 \Leftrightarrow \frac{-x-|x-2|-3}{x+1}<0 \Leftrightarrow \frac{x+3+|x-2|}{x+1}>0$$

Определим интервалы знакопостоянства выражения ($x$–2) (см. Рис. 2.15)

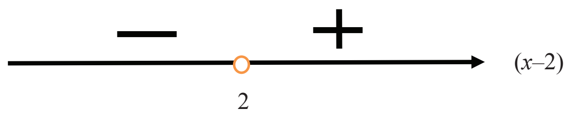


Рис. 2.15

Итак,

$$\begin{cases} x<2 \\ \dfrac{x+3-x+2}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ \dfrac{5}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2 \Leftrightarrow x\in(-1;2);$$

$$\begin{cases} x\ge 2 \\ \dfrac{x+3+x+2}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \dfrac{2x+5}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x\ge 2 \\ 2x+5>0 \\ x+1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 2 \\ 2x+5<0 \\ x+1<0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x\ge 2 \\ x>-2,5 \\ x>-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 2 \\ x<-2,5 \\ x<-1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow x\ge 2 \Leftrightarrow x\in[2;+\infty);$$

$(-1;2)\cup[2;+\infty)=(-1;+\infty)$, следовательно, $x\in(-1;+\infty)$.

*Ответ:* $x\in(-1;+\infty)$.

## 2.4. Упражнения

1. Решите уравнение $\frac{|x-3|}{12}+\frac{2}{3}=8$.

2. Решите уравнение $\frac{|x+2|}{7}-1,2=-\frac{3}{5}$.

3. Решите уравнение $|x+2|-|5-x|=6$.

4. Решите уравнение $|x|+|x-4|=10-|3x+5|$.

5. Решите уравнение $\frac{|x+2|}{4}-\frac{1}{2}=7$.

6. Решите уравнение $|x+3|=4x-1$.

7. Решите уравнение $|4-x|+|x-2|=2$.

8. Решите уравнение $\left|\left||7-x|+3\right|-5\right|=2$.

9. Решите уравнение $\frac{7}{|x+3|}=5$.

10. Решите уравнение $\frac{5}{|x-2|}+\frac{1}{3}=2$.

11. Решите неравенство $|2x-9|\le 7$.

12. Решите неравенство $|x+6|\ge 5$.

13. Решите неравенство $|5-2x|\ge 4x+3$.

14. Решите неравенство $|x-1|+|3-x|\le x+4$.

15. Решите неравенство $|5x-6|-|x-3|>2|5-x|$.

16. Решите неравенство $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$.

17. Решите уравнение $\frac{|2x-3|}{2x-3}=1$.

18. Решите уравнение $|4x-7|=7-4x$.

# 3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

## 3.1. Системы линейных уравнений с двумя переменными

В этой главе мы рассмотрим некоторые методы решения систем уравнений с двумя неизвестными. К решению систем уравнений приводят многие задачи техники, экономики, медицины и других областей знания.

**Линейной** системой двух уравнений с двумя неизвестными $x$ и $y$ называется система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Здесь $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c_1$,$c_2$ – заданные числа. Числа $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ называются коэффициентами системы уравнений, а числа $c_1$,$c_2$ – свободными членами.

**Решением** системы линейных уравнений с двумя неизвестными называется упорядоченная пара чисел, удовлетворяющая каждому уравнению системы. Обратите внимание, что в линейную систему входят уравнения, содержащие переменные $x$ и $y$ только в первой степени.

**Решить систему** уравнений значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Стандартными методами решения систем линейных уравнений являются метод подстановки и метод исключения неизвестных (метод Гаусса).

Идею этих методов рассмотрим на примерах.

**Пример 1.** Найти решение системы уравнений $\begin{cases} x - 3y = -17, \\ 3x - y = 11. \end{cases}$

*Решение.* Из первого уравнения системы найдем выражение переменной $x$ через $y$. Далее подставим полученное выражение во второе уравнение системы.

$$\begin{cases} x-3y=-17, \\ 3x-y=-11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-17, \\ 3x-y=-11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-17, \\ 3\cdot(3y-17)-y=-11, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-17, \\ y=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=5. \end{cases}$$

$$3\cdot(3y-17)-y=-11,$$

$$9y-51-y=-11,$$

$$8y=40,$$

$$y=5\,.$$

Подставляя $y=5$ в первое уравнение последней системы, находим значение $x=3\cdot 5-17=-2$. Итак, пара чисел (–2;5) является решением данной системы уравнений.

*Ответ:* (–2;5).

Для демонстрации метода исключения неизвестных рассмотрим следующий пример.

**Пример 2**. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ 4x+7y=15. \end{cases}$

*Решение.* Из условия видно, что выражение переменной *x* через *y*, или, наоборот, *y* через *x* не рационально, так как приводит к появлению дробей. Поступим следующим образом. Известно, что, если умножить уравнение на число, не равное нулю, то множество его решений не изменится. Поэтому умножим первое уравнение системы на 7, а второе уравнение умножим на 2. Затем сложим полученные уравнения

$$\begin{cases} 3x-2y=4, & \big|\cdot 7 \\ 4x+7y=15, & \big|\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x-14y=28, \\ 8x+14y=30, \end{cases}$$

$$29x=58,$$

откуда $x=2$ . Подставляя найденное *x* в одно из уравнений системы, получим $y=1$.

Итак, пара чисел (2;1) есть решение исходной системы.

*Ответ:* (2;1).

Всегда ли линейная система уравнений имеет единственное решение? На этот вопрос можно ответить, если обратиться к геометрической интерпретации уравнений этой системы.

Уравнения, входящие в систему, являются линейными. Если, например, из первого уравнения системы выразить переменную $y$ через переменную $x$, то получится выражение $y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$, $b_1 \neq 0$. Обозначая коэффициенты $-\frac{a_1}{b_1} = k_1$, $\frac{c_1}{b_1} = h_1$, $k_1 \in R$, $h_1 \in R$, получим новое выражение $y = k_1 x + h_1$, представляющее собой линейную зависимость переменной $y$ от переменной $x$. Вообще говоря, зависимость $y = y(x)$, при которой каждому значению независимой переменной $x$ соответствует единственное значение переменной $y$, называется функцией. Переменная $x$ называется аргументом функции, а переменная $y$ – функцией. Чтобы получить наглядное представление функции, используют понятие графика функции.

**Графиком функции** $y = y(x)$ называется множество точек плоскости, координаты которых имеют вид $(x, y(x))$.

Легко увидеть, что графиком линейной функции является прямая.

Прямые, соответствующие линейным уравнениям, входящим в систему, на координатной плоскости могут пересекаться, совпадать или не пересекаться (быть параллельными). Если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение (координаты точки пересечения прямых), если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений (координаты точек, принадлежащих этой прямой), и третий случай, когда прямые параллельны (нет точек пересечения), тогда система не имеет решений.

Итак, возникают три случая:

если коэффициенты в системе линейных уравнений не пропорциональны, то есть $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система уравнений имеет единственное решение;

если для коэффициентов и свободных членов системы уравнений выполняется соотношение $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система уравнений имеет бесконечно много решений;

если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений. В этом случае говорят, что система несовместна.

### 3.2. Задачи

**1.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 7x + y = 0, \\ 2x - 3y = -23. \end{cases}$

*Решение.* Из первого уравнения выразим $y = -7x$, и подставим выражение для $y$ во второе уравнение:

$$2x + 3 \cdot 7x = -23 \Leftrightarrow 23x = -23 \Leftrightarrow x = -1.$$

Подставляя вместо $x$ найденное значение –1, получим, что $y = 7$.

*Ответ:* (–1;7).

**2.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x + 2y = -7, \\ 3x - 7y = -37. \end{cases}$

*Решение.* Решим эту систему методом исключения.

$$\begin{cases} 5x + 2y = -7, \\ 3x - 7y = -37, \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 5 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 6y = -21, \\ 15x - 35y = -185, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 6y = -21, \\ 0 \cdot x + 41y = 164, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = -7, \\ 41y = 164, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = -7, \\ y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = 4. \end{cases}$$

*Ответ:* (–3;4).

**3.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = -7, \\ 3x + 6y = 5. \end{cases}$

*Решение.* Данная система не имеет решений, так как $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \neq \frac{-7}{5}$. Соответствующие коэффициенты при неизвестных пропорциональны, и равны между собой. Но это отношение не совпадает с отношением свободных членов. Согласно вышеприведенным утверждениям, система не имеет решений, то есть несовместна.

*Ответ:* $\varnothing$.

**4.** Решите систему уравнений $\begin{cases} -x+2y=7, \\ 3x-6y=-21. \end{cases}$

*Решение.* Отношения соответствующих коэффициентов системы, стоящих при неизвестных, и отношение свободных членов равны:

$$\frac{-1}{3}=\frac{2}{-6}=\frac{7}{-21}.$$

Это говорит о том, что данная система имеет бесконечно много решений. Действительно, если второе уравнение разделить на (–3), то будет получено первое уравнение системы. Выражая переменную $x$ через $y$, получим $x=2y-7$. Придавая $y$ конкретные числовые значения, можно получить соответствующие значения переменной $x$. Например, при $y = 0$ переменная $x = -7$, то есть пара чисел (–7; 0) является одним из решений исходной системы. Чтобы показать этот факт ответ записывают следующим образом: $x=2y-7,\ y\in R$.

*Ответ:* $x=2y-7,\ y\in R$.

**5.** Найдите координаты точки пересечения прямых: $2x+3y=5$ и $5x-2y-3=0$.

*Решение.* Для нахождения точки пересечения прямых нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 5x-2y-3=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5, \\ 5x-2y=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=10, \\ 15x-6y=9, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5, \\ 19x=19, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5, \\ x=1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y=3, \\ x=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=1. \end{cases}$$

*Ответ:* (1;1).

**6.** Найдите координаты точки пересечения двух прямых $2x+3y-8=0,\ 3x-5y+7=0$, а также координаты точек, симметричных полученной относительно координатных осей.

*Решение.* Для нахождения координат точки пересечения прямых нужно решить следующую систему двух уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y-8=0, \\ 3x-5y+7=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=8, \\ 3x-5y=-7, \end{cases}\left|\begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} {}_{-}6x+9y=24, \\ \;\;6x-10y=-14, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$19y=38,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=8, \\ y=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8-6, \\ y=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2, \\ y=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Итак, точка пересечения прямых имеет координаты (1; 2). Обозначим эту точку буквой М.

Определим теперь координаты точки, которая симметрична точке М относительно оси О$x$. Для того чтобы найти эту точку, нужно из точки М опустить перпендикуляр на ось О$x$, основание перпендикуляра обозначим буквой К. На продолжении перпендикуляра МК отложим отрезок, равный длине МК. Полученная точка (обозначим её буквой L) является точкой, симметричной точке М. Координаты L (1; –2). Аналогично определим координаты точки F, симметричной точке М относительно оси О$y$. Точка F имеет координаты (–1; 2).

Точки М, L, F изображены на Рис. 3.1.

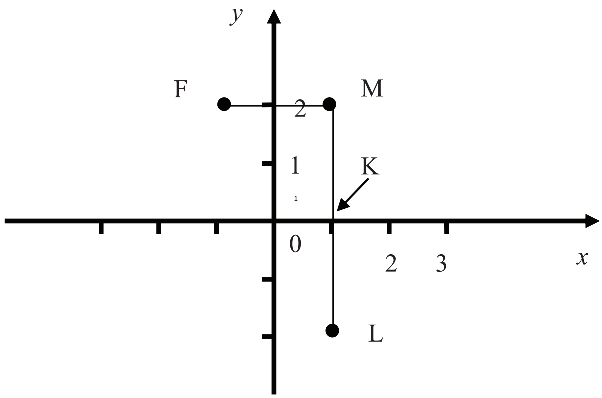


Рис. 3.1

*Ответ:* М(1;2); L(1;–2);F(–1;2).

**7.** Решите в натуральных числах уравнение: $5x-2y=13$.

*Решение.* Подберем натуральные числа, которые являются решением данного уравнения. Если $x = 3$, $y = 1$, то получится 13, то есть $5\cdot3–2\cdot1 = 13$.

$$\begin{array}{r} \_\,5\cdot x-2\cdot y=13, \\ 5\cdot 3-2\cdot 1=13, \\ \hline 5(x-3)-2(y-1)=0. \end{array}$$

Следовательно, $5(x-3)=2(y-1)$. Для того, чтобы выполнялось последнее равенство, нужно, чтобы $x$–3 было четным числом, а $y$–1 было кратно 5. Это значит, что $x-3=2k$, $y-1=5k$, или $x=2k+3$, $y=5k+1$. Так как нам нужно решить задачу в натуральных числах, то $k$ может принимать значения 0, 1, 2, …. При $k = 0$ мы получим решение (3;1), при $k = 1$ найдем другое решение уравнения (5;6), и так далее. То есть, перебирая все значения $k$, мы найдем все решения исходного уравнения.

*Ответ:* $x=2k+3$, $y=5k+1$, $k=0;1;2;3;...$

**8.** Решите в целых числах уравнение $3x+7y=22$.

*Решение.* Пара чисел (5;1) является одним из решений этого уравнения. Действительно, подставляя их в уравнение, получим $3\cdot5+7\cdot1=22$. Вычитая последнее числовое равенство из исходного уравнения, имеем

$$\begin{array}{r} \_\,3\cdot x+7\cdot y=22, \\ 3\cdot 5+7\cdot 1=22, \\ \hline 3\cdot(x-5)+7\cdot(y-1)=0. \end{array}$$

Следовательно, $3\cdot(x-5)=-7(y-1)$. Данное равенство возможно тогда, когда

$$x-5=7k,\ y-1=-3k,\ \forall k\in Z$$

Выражая $x$ и $y$ из последних равенств, найдем решение поставленной задачи: $x=7k+5$, $y=-3k+1$, $\forall k\in Z$.

*Ответ:* $x=7k+5$, $y=-3k+1$, $\forall k\in Z$.

**9.** Решите в целых числах уравнение $2x-6y=13$.

*Решение.* Внимательно изучив уравнение, видно, что левая часть уравнения делится на 2, то есть при любой комбинации целых чисел слева стоит четное число, а справа стоит число 13 – нечетное число, следовательно, в целых числах данное уравнение решений не имеет.

*Ответ:* решений нет.

**10.** Решите в целых числах уравнение $216x-31y=23$.

*Решение.* Этот пример чуть-чуть сложнее предыдущих. Здесь не так легко подобрать числа, удовлетворяющие данному уравнению. Воспользуемся алгоритмом Евклида, чтобы найти наибольший общий делитель чисел 216 и 31.

$$216=6\cdot 31+30,$$
$$31=1\cdot 30+1,$$
$$30=30,$$

то есть число 1 можно представить так

$$1=31-\underline{30}=31-(216-6\cdot 31)=7\cdot 31-216=\left(-1\right)\cdot 216-31\cdot(-7).$$

Перепишем это равенство в виде $216\cdot(-1)-31\cdot(-7)=1$. Отсюда видно, что пара чисел (–1;–7) является одним из целых решений уравнения $216\cdot x-31\cdot y=1$. Чтобы найти какое-нибудь целое решение уравнения $216\cdot x-31\cdot y=23$, умножим равенство $216\cdot(-1)-31\cdot(-7)=1$ на число 23,

$$216\left(-1\right)\cdot 23-31\cdot(-7)\cdot 23=1\cdot 23,$$

тогда пара чисел $\left(\left(-1\right)\cdot 23;(-7)\cdot 23\right)=\left(-23;-161\right)$ является решением исходного уравнения. Далее

$$\begin{array}{r} -\;216\cdot x-31\cdot y=23 \\ \underline{216\cdot(-23)-31\cdot(-161)=23} \\ 216(x+23)-31(y+161)=0, \end{array}$$

поэтому

$$216(x+23)=31(y+161),$$

то есть

$$x+23=31k,\ \ y+161=216k,\ \ k\in Z,$$

следовательно,

$$x=31k-23,\ \ y=216k-161,\ \ k\in Z.$$

*Ответ:* $x=31k-23, y=216k-161,\ k\in Z.$

Многие текстовые задачи можно решить с помощью систем уравнений.

**11.** В книжный магазин для продажи привезли учебники по математике и географии. Когда продали 40% учебников по математике и 35% учебников по географии, что составило в общей сложности 59 книг, то учебников по географии осталось в 6 раз меньше, чем по математике. Сколько учебников по математике привезли в магазин для продажи?

*Решение.* Пусть в книжный магазин привезли $x$ учебников по математике и $y$ учебников по географии. Тогда 40% учебников по математике – это $0{,}4x$, а 35% учебников по географии – это $0{,}35y$, и первым уравнением системы будет $0{,}4x+0{,}35y = 59$. После продажи учебников по математике осталось 60%, то есть $0{,}6x$, а учебников по географии 65%, то есть $0{,}65y$. Согласно условию задачи получим второе уравнение $0{,}6x = 6\cdot 0{,}65y$, или $0{,}6\ x = 3{,}9y$. Итак, нужно решить следующую систему двух уравнений

$$\begin{cases}0{,}4x+0{,}35y=59,\\ 0{,}6x=3{,}9y.\end{cases}$$

$$\begin{cases}0{,}4x+0{,}35y=59,\\ x=6{,}5y,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0{,}4\cdot 6{,}5y+0{,}35y=59,\\ x=6{,}5y,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2{,}95y=59,\\ x=6{,}5y,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=20,\\ x=6{,}5y,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=20,\\ x=130.\end{cases}$$

*Ответ:* 130 учебников по математике и 20 учебников по географии привезли в магазин.

**12.** Одну сторону прямоугольника увеличили на 12 см и получили квадрат. От этого периметр фигуры увеличился в полтора раза. Чему равна сторона получившегося квадрата?

*Решение.* Обозначим через $x$ и $y$ стороны прямоугольника. Составим уравнения, согласно условиям задачи. Пусть увеличили сторону $\underline{x}$ на 12 см, тогда первое уравнение системы примет вид $x+12 = y$. Второе уравнение связано с периметром прямоугольника, который равен $2x+2y$, и периметром полученного квадрата. Периметр полученного квадрата в свою очередь равен $4y$. Тогда второе уравнение имеет вид $1{,}5(2x+2y) = 4y$. Итак, решим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x+12=y \\ 1{,}5\left(2x+2y\right)=4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+12=y \\ 3x+3y=4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+12=y \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+12=3x \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=18. \end{cases}$$

*Ответ:* 18 см – сторона квадрата.

(# – данная задача предлагалась на многопрофильной инженерной олимпиаде «ЗВЕЗДА»).

**13.** Для экспорта завод изготовил 450 деталей двух видов. При проверке на качество было отбраковано 2% деталей первого вида и 3% деталей второго вида, что составило 12 деталей. Сколько деталей второго вида было отправлено на экспорт?

*Решение.* Пусть $x$ деталей первого вида и $y$ деталей второго вида изготовил завод для экспорта. Тогда первое уравнение системы имеет вид $x+y = 450$. Согласно условиям задачи, второе уравнение можно записать в таком виде $0{,}02x+0{,}03y = 12$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=450, \\ 0{,}02x+0{,}03y=12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=450, \\ 2x+3y=1200, \end{cases}\Bigg|\cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=900, & (1) \\ 2x+3y=1200, & (2) \end{cases}$$

$$y=300,$$

из (2) вычитаем (1) и получаем, что завод изготовил 300 деталей второго вида. На экспорт было отправлено $0{,}97\cdot 300 = 291$ деталь второго вида.

*Ответ:* 291 деталь.

**14.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x-y=6, \\ |x-y|=4. \end{cases}$

*Решение.*

$$\begin{cases} 3x-y=6, \\ |x-y|=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-6, \\ |x-y|=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-6, \\ |x-3x+6|=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-6, \\ |-2x+6|=4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 6, \\ \left[\begin{array}{l} -2x + 6 = 4, \\ -2x + 6 = -4, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 6, \\ \left[\begin{array}{l} -2x = -2, \\ -2x = -10, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 6, \\ \left[\begin{array}{l} -2x = -2, \\ -2x = -10, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 6, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5, \\ y = 9, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow (1;-3);(5;9).$$

*Ответ:* $(1;-3);(5;9)$.

**15.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - |y| = 6, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$

*Решение.*

$$\begin{cases} 2x - |y| = 6, \\ |x - y| = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - |y| = 6, \\ \left[\begin{array}{l} x - y = 2, \\ x - y = -2, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - |y| = 6, \\ x - y = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - |y| = 6, \\ x - y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Последняя совокупность распадается на 4 системы уравнений

$$1)\begin{cases} 2x - y = 6, \\ x - y = -2, \\ y \ge 0, \end{cases} 2)\begin{cases} 2x + y = 6, \\ x - y = -2, \\ y < 0, \end{cases} 3)\begin{cases} 2x - y = 6, \\ x - y = 2, \\ y \ge 0, \end{cases} 4)\begin{cases} 2x + y = 6, \\ x - y = 2, \\ y < 0. \end{cases}$$

Решим эти системы по отдельности.

$$1)\ \begin{cases} 2x - y = 6, \\ x - y = -2, \\ y \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 6, \\ x = y - 2, \\ y \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y - 2) - y = 6, \\ x = y - 2, \\ y \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 4 - y = 6, \\ x = y - 2, \\ y \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10, \\ x = 8, \\ y \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow (8;10).$$

$$2)\begin{cases}2x+y=6,\\ x-y=-2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=6,\\ x=y-2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(y-2)+y=6,\\ x=y-2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y-4+y=6,\\ x=y-2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10/3,\\ x=y-2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

$$3)\begin{cases}2x-y=6,\\ x-y=2,\\ y\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=6,\\ x=y+2,\\ y\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(y+2)-y=6,\\ x=y+2,\\ y\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y+4-y=6,\\ x=y+2,\\ y\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2,\\ x=4,\\ y\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow(4;2).$$

$$4)\begin{cases}2x+y=6,\\ x-y=2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=6,\\ x=y+2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(y+2)+y=6,\\ x=y+2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y+4+y=6,\\ x=y+2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2/3,\\ x=y+2,\\ y<0,\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

*Ответ:*(8;10); (4;2).

## 3.3. Упражнения

**1.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases}5x+2y+15=0,\\ 4x-3y=11.\end{cases}$

**2.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases}17x-15y=12,\\ 25x+14y=234.\end{cases}$

**3.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases}x-5y=18,\\ 3x+2y=-14.\end{cases}$

**4.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 2x+5y=-13, \\ 7x-2y=13. \end{cases}$

**5.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} x+2y-4=0, \\ 5x-3y=7. \end{cases}$

**6.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 3x-4y-7=0, \\ 2x+3y+1=0. \end{cases}$

**7.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 5x+4y+38=0, \\ 3x-2y-8=0. \end{cases}$

**8.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 20x+5y=14, \\ 15x+10y=33. \end{cases}$

**9.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 7x+4y=-34, \\ 3x+5y=-31. \end{cases}$

**10.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 2x+13y=-6, \\ x-8y=26. \end{cases}$

**11.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 7x+3y=-6,6, \\ 2x-5y=-5,4. \end{cases}$

**12.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 2x+3y=0,9, \\ 2x-5y=-3,7. \end{cases}$

**13.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 5x-2y=-0,6, \\ 3x+5y=4,6. \end{cases}$

**14.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 2x+3y-0,7=0, \\ 7x-4y+1,9=0. \end{cases}$

**15.** Решите систему двух уравнений $\begin{cases} 6x+3y=5,4, \\ 2x-5y=3. \end{cases}$

**16.** Найдите координаты точки пересечения прямых: $3x+2y-5=0$ и $x+6y-23=0$.

**17.** Найдите координаты точки пересечения прямых: $x+y-4=0$ и $2x-5y-15=0$.

**18.** Найдите координаты точки пересечения прямых: $3x-2y-6=0$ и $y=0$.

**19.** Найдите координаты точки пересечения прямых: $7x+4y+3=0$ и $2x-5y+7=0$.

**20.** Найдите координаты точки пересечения прямых: $7x+4y+3=0$ и $2x-5y+7=0$.

**21.** Найдите координаты точки пересечения прямых $7x+8y+1=0$ и $21x+19y-2=0$, а также координаты точек, симметричных относительно оси О$x$ и начала координат. Изобразите полученные точки на координатной плоскости.

**22.** Найдите координаты точки пересечения прямых $3x+2y=0$ и $x-5y-17=0$, а также координаты точек, симметричных относительно оси О$y$ и начала координат. Изобразите полученные точки на координатной плоскости.

**23.** Найдите координаты точки пересечения прямых $y=2x-7$ и $y=5-x$, а также координаты точек, симметричных относительно координатных осей. Изобразите полученные точки на координатной плоскости.

**24.** Найдите координаты точки пересечения прямых $y=-\frac{5x}{2}-7{,}5$ и $y=-\frac{2x}{5}-\frac{27}{5}$, а также координаты точек, симметричных относительно координатных осей. Изобразите полученные точки на координатной плоскости.

**25.** Найдите координаты точки пересечения прямых $y=-\frac{18x}{23}-15\frac{14}{23}$ и $y=\frac{3x}{11}-4$, а также координаты точек, симметричных относительно координатных осей и начала координат. Изобразите полученные точки на координатной плоскости.

**26.** Решите уравнение в натуральных числах $3x-2y=11$.

**27.** Решите уравнение в целых числах $5x+2y=17$.

**28.** Решите уравнение в целых числах $2x+3y=7$.

**29.** Решите уравнение в натуральных числах $2x-8y=7$.

**30.** Решите уравнение в целых числах $2016x-25y=17$.

**31.** Задача. Купили два сорта краски. Первого сорта – на 600 рублей, а второго – на 400 рублей. При этом краски второго сорта купили на 1 кг больше, чем первого, но килограмм краски второго сорта на 100 рублей дешевле килограмма краски первого сорта. Сколько было куплено килограммов краски первого сорта?

**32.** Задача. Фермерское хозяйство ежегодно собирало с двух полей 1140 т пшеницы. После проведения агротехнических мероприятий урожай на первом поле повысился на 25%, а на втором – на 20%; в результате с этих полей было собрано 1398 т пшеницы. Сколько тонн пшеницы собирало хозяйство со второго участка до проведения агротехнических мероприятий?

**33.** Задача. Сумма двух чисел равна 27. Найдите эти числа, если 40% первого числа равны половине второго числа.

**34.** Задача. На элеватор поступило 350 тонн пшеницы двух сортов. Первый сорт содержал 2% отходов, а второй – 3% отходов. После очистки получили 341 тонну чистой пшеницы. Сколько тонн пшеницы первого сорта поступило на элеватор?

**35.** Задача. В двух бидонах находится 70 л молока. Если из первого бидона молока перелить во второй 12,5% молока находящегося в первом бидоне, то в обоих бидонах будет поровну. Сколько литров молока в каждом бидоне?

**36.** Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-3|+y=5, \\ x+|y-2|=4. \end{cases}$

**37.** Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-2|+y=3, \\ x+|y-2|=5. \end{cases}$

**38.** Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-y|-x=1, \\ x+|y-2|=3. \end{cases}$

**39.** Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-y|+y=5, \\ x+|y-2|=5. \end{cases}$

**40.** Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-y|=6, \\ 2x+|y-2|=5. \end{cases}$

## Ответы

### 1.4. Упражнения

**1.** 1. **2.** 3. **3.** –41. **4.** 6. **5.** 2500. **6.** 1275. **7.** –25. **9.** КРОСС–35977. **10.** М(7). **11.** Т(12), АТ = 2 АВ = 14. **12.** 6 общих делителей. **13.** –6. **14.** В 3 раза. **15.**М(–3). 16. С(21).

### 2.4. Упражнения

**1.** –85; 91. **2.** –6,2; 2,2. **3.** 4,5. **4.** –11/3;1/3;1. **5.** –32;28. **6.** 4/3. **7.** [2; 4]. **8.** 3; 7; 11. **9.** –4,4; –1,6. **10.** –1; 5. **11.** [1; 8]. **12.** $(-\infty;-11]\cup[-1;+\infty)$. **13.** $(-\infty;1/3)$. **14.** [0;8]. **15.** $(-\infty;-7/2)\cup(19/8;+\infty)$. **16.**$(-5;-2)\cup(-1;+\infty)$. **17.** $(3/2;+\infty)$. **18.** $(-\infty;7/4]$.

### 3.3. Упражнения

**1.** (–1;–5). **2.** (6;6). **3.** (–2;–4). **4.** (1;–3). **5.** (2;1). **6.** (1;–1). **7.** (–2;–7). **8.** (–0,2;3,6). **9.** (–2;–5). **10.** (10;–2). **11.** (–1,2;0,6). **12.** (–0,3; 0,5). **13.** (0,2;0,8). **14.** (–0,1; 0,3). **15.** (1;–0,2). **16.** (–1;4). **17.** (5;–1). **18.** (2;0). **19.** (–1;1). **20.** (2;–5). **21.** (1;–1); относительно *Ox* (1;1); относительно начала координат (–1;1). **22.** (2;–3); относительно оси *Oy* (–2;–3); относительно начала координат (–2;3). **23.** (4;1); относительно *Ox* (4;–1); относительно *Oy* (–4;1). **24.** (–1;–5); относительно *Ox* (–1; 5); относительно *Oy* (1;–5). **25.** (–11;–7); относительно *Ox* (–11;7); относительно *Oy* (11;–7); относительно начала координат (11;7). **26.** $x = 2k+5$, $y = 3k+1$, $k = 0,1,2,\ldots$. **27.** $x = -2k+3$, $y = 5k+1$, $k\in Z$.
**28.** $x = -3k+2$, $y = 2k+1$, $k\in Z$. **29.** $\varnothing$. **30.** $x = 25k+12$, $y = 2016k+967$, $k\in Z$. **31.** 3 кг. **32.** 540 т. **33.** 15 и 12. **34.** 150 т. **35.** 40 л и 30 л. **36.** (2;4). **37.** (4;1). **38.** (0;–1);(1;3). **39.** (3;4);(5;2). **40.** (–3;–9); (1/3;19/3).

## Библиографический список


1. Агаханов Н.Х. Математика. Районные олимпиады. 6–11 классы / Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. – М.: Просвещение, 2010. – 192 с.
2. Математика. Областные олимпиады. 8–11 классы / [Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и др.]. – М.: Просвещение, 2010. – 239 с
3. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / [Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и др.]. – М. : Просвещение, 2008. – 192 с.
4. Агаханов Н.Х. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский; [под общ. ред. С.И. Демидовой, И.И. Колисниченко]. – М. : Просвещение, 2009. – 159 с.
5. Агаханов Н. Х. Математика. Международные олимпиады / Н.Х. Агаханов, П.А. Кожевников, Д.А. Терешин. – М. : Просвещение, 2010. – 127 с.
6. И.И. Баврин. Сборник задач и занимательных упражнений по математике 5–9 классы. – М.: ВЛАДОС, 2014. – 240 с.
7. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика. – М.: Бюро Квантум, 2007. — 160 с.
8. Р.М. Федоров, А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи, И.В. Ященко. Московские математические олимпиады 1993–2005 г. / Под ред. В.М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006.– 456 с.
9. Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика. Алгебра. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 479 с.
10. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2012 года [сайт]. – http://olimpiads.mccme/ru/ommo/12/
11. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2013 года [сайт]. – http://olimpiads.mccme/ru/ommo/13/
12. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2014 года [сайт]. – http://olimpiads.mccme/ru/ommo/14/
13. Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников 2012 года [сайт]. – http://olimpiads.mccme/ru/ommo/15/
14. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н. Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра.– М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 454 с.
15. И.М. Гельфанд, А. Шень. Алгебра. – М.: МЦНМО, 2014. – 144 с.

16. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, 2001. Глава «Король математиков».
17. В.И. Арнольд. Задачи для детей от 5 до 15 лет. 4 издание– М.: МЦНМО, 2014. – 16 с.
18. С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, М.К. Потапов. Старинные занимательные задачи. – М.:Дрофа, 2002. – 176 с.
19. И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. ЕГЭ 1000 задач. Математика. – М.:Экзамен, 2015. – 304 с.
20. А.В. Спивак. Математический праздник. – М.: Бюро Квантум, 2004. –288 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 88).
21. Уравнения в целых числах. [сайт] http://math4school.ru/uravnenija_v_celih_chislah.html

*Учебное издание*

КИМ-ТЯН Луиза Ревмировна
ДУБИНСКИЙ Юлий Андреевич

# МАТЕМАТИКА

## Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников

## 6–7-й классы

В авторской редакции

Компьютерная верстка *И.Г. Иваньшина*

| | | |
|---|---|---|
| Подписано в печать 01.09.16 | Бумага офсетная | |
| Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$ | Печать цифровая | Уч.-изд. л. 3,4 |
| | Тираж 50 экз. | Заказ 5190 |

Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (495) 638-45-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (499) 236-76-17, тел./факс (499) 236-76-35