МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Ю.А. Рахштадт

ФИЗИКА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ПОДГОТОВКЕ К ОЛИМПИАДАМ ШКОЛЬНИКОВ

9–11-й классы (в трех частях)

Часть II
МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Руководство к решению задач

Рекомендовано редакционно-издательским советом

МИСиС

Москва 2016

УДК 53
Р27

Рахштадт Ю.А.

Р27 Физика : метод. пособие по подготовке к олимпиадам школьников : 9–11-й классы. Ч. II. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Руководство к решению задач / Ю.А. Рахштадт. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2016. – 50 с.

Цель данного пособия – помочь школьникам эффективно подготовиться к олимпиадам по физике.

Пособие содержит примеры олимпиадных заданий с разбором, анализ их выполнения учащимися, а также справочные материалы, охватывающие все представленные на олимпиаде разделы физики.

Пособие предназначено для школьников 6–11 классов и для учителей физики. Материалы пособия могут быть использованы для подготовки к различным олимпиадам по физике, а также на уроках физики.

УДК 53

СОДЕРЖАНИЕ

1. КИНЕМАТИКА

Пример 1.1. По графику зависимости $a_x(t)$, приведенному на рис. 1.1, постройте графики зависимости $V_x(t)$ (см.рис. 1.2) и $x(t)$ (см. рис. 1.3), считая, что в начальный момент времени координата и скорость движения материальной точки равны нулю. Определите характер движения .

Решение

$$\boxed{t = 0 \div 1c}$$

$$V_x = V_{10x} + a_{1x}t = 0 + 1 \cdot t,\ м/с$$

$$x(t) = x_{10} + V_{10x}t + \frac{a_{1x}t^2}{2} = \frac{1 \cdot t^2}{2}, м$$

$$\boxed{t = 1 \div 3c}$$

$$V_x = V_{20x} + a_{2x}t = 1 - 1 \cdot t,\ м/с$$

$$x(t) = x_{20} + V_{20x}t + \frac{a_{2x}t^2}{2} = 0{,}5 + 1 \cdot t - \frac{1 \cdot t^2}{2}, м$$

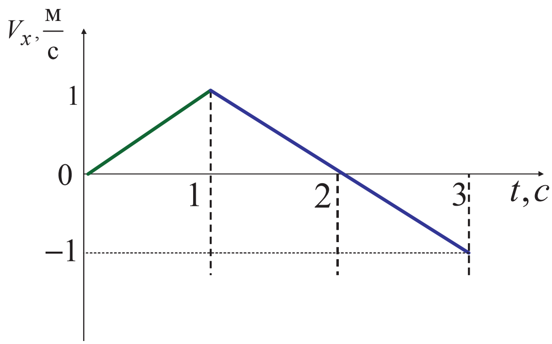


Рис. 1.1

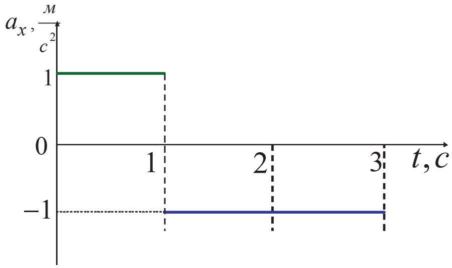


Рис. 1.2

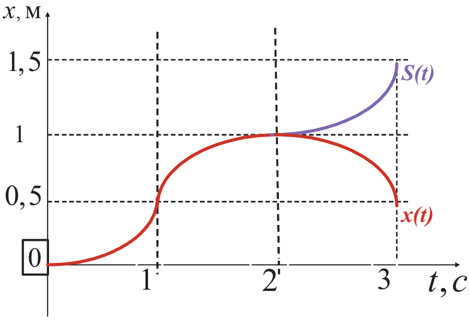


Рис. 1.3

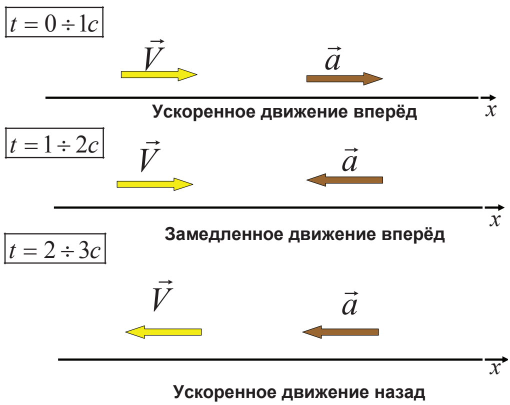


Рис. 1.4.

Характер движения определяется *пространственным соотношением* векторов $\vec{V}$ и $\vec{a}$ (рис. 1.4).

Пример 1.2. Автомобиль начал движение с ускорением $a_м = 0{,}5$ м/с^2 в тот момент, когда мимо него проезжал трамвайный вагон со скоростью $v_т = 18$ км/ч $= 5$ м/с (рис. 1.5). Какую скорость будет иметь автомобиль, когда он догонит трамвай? Ускорение трамвая $a_т = 0{,}3$ м/с^2.

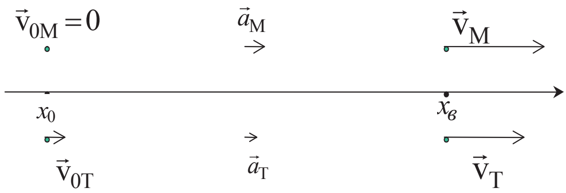


Рис. 1.5

Решение

Движение автомобиля – ускоренное, без начальной скорости ($v_{0м} = 0$). Следовательно, его скорость в тот момент времени, когда он догонит трамвай ($t_в$), можно определить из уравнения

$$v_м = a_м\, t_в. \tag{1}$$

Время $t_в$ можно определить из условия, что в момент встречи

$$x_м(t_в) = x_т(t_в) = x_в. \tag{2}$$

Так как и автомобиль, и трамвай в момент начала отсчета времени находятся в одной и той же точке и оба движутся равноускоренно в одну сторону, то в соответствии с уравнением (2):

$$\left.\begin{aligned} x_м(t) &= x_0 + \frac{a_м t^2}{2}, \\ x_т(t) &= x_0 + v_{0т} t + \frac{a_т t^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Подставим (3) в (1). Получим

$$\left.\begin{aligned} x_0 + \frac{a_м t_в^2}{2} &= x_0 + v_{0т} t_в + \frac{a_т t_в^2}{2}, \\ v_{0т} t_в + \frac{a_т t_в^2}{2} - \frac{a_м t_в^2}{2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Решая совместно уравнения (4), получим

$$t_{\text{в}}\left[\mathrm{v}_{0\text{т}}-\frac{\left(a_{\text{м}}-a_{\text{т}}\right)\,t_{\text{в}}}{2}\right]=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) имеет два решения:

$$1)\ t_{\text{в}_1}=0;$$

$$2)\ t_{\text{в}_2}=\frac{2\mathrm{v}_{0\text{т}}}{a_{\text{м}}-a_{\text{т}}}. \qquad (6)$$

Первое решение не подходит, так как нужно определить скорость автомобиля, когда он догонит трамвай.

Подставив (6) в (1), получим

$$\mathrm{v}_{\text{м}}=\frac{2\mathrm{v}_{0\text{т}}a_{\text{м}}}{a_{\text{м}}-a_{\text{т}}}. \qquad (7)$$

Подставим в (7) числовые значения и выполним вычисления:

$$\mathrm{v}_{\text{м}}=\frac{2\cdot 5\cdot 0{,}5}{0{,}5-0{,}3}=25\ \text{м/с}\ .$$

Пример 1.3. Зависимость проекции ускорения от времени при некотором движении тела представлена на рис. 1.6. Определите среднюю путевую скорость за первые 8 с движения. Начальная скорость равна нулю.

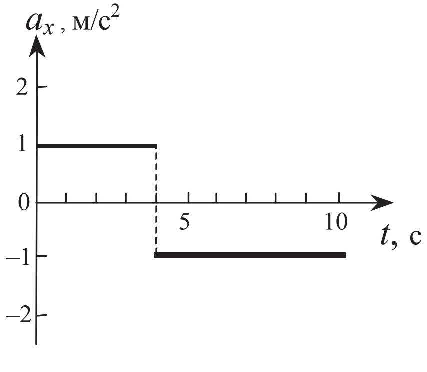


Рис. 1.6

Решение

$$\langle V \rangle = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}; \quad (1)$$

$$S_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}; \quad (2)$$

$$S_2 = V_{02} t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2}; \quad (3)$$

$$V_{02} = V_1 = a_1 t_1; \quad (4)$$

$$S_2 = a_1 t_1 t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2}; \quad (5)$$

$$\langle V \rangle = 2 \text{ м/с}.$$

Пример 1.4. По заданному графику зависимости проекции ускорения автомобиля от времени (рис. 1.7) постройте график зависимости скорости от времени (рис. 1.8) и определите путь, пройденный автомобилем за 3 с от начала движения. Начальная скорость автомобиля равна нулю.

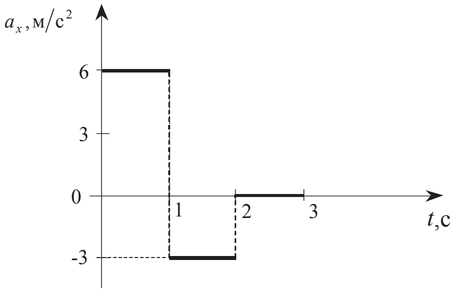


Рис. 1.7

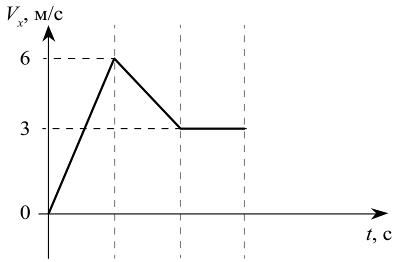


Рис. 1.8.

Решение

$$V_1 = V_{01} + 6 \cdot 1 = 6 \text{ м/с};$$

$$V_2 = 6 + (-3) \cdot 1 = 3 \text{ м/с};$$

$$V_3 = 3 \text{ м/с}.$$

$$S = \frac{6 \cdot 1^2}{2} + \left(3 \cdot 1 + \frac{3 \cdot 1^2}{2} \right) + 3 \cdot 1 = 10{,}5 \text{ м}$$

Пример 1.5. Эскалатор метрополитена поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение времени 1 мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за время 3 мин. Сколько времени будет подниматься пассажир по движущемуся эскалатору?

Решение

Закон сложения скоростей:

$$\boxed{\vec{u} = \vec{u}' + \vec{V}} \tag{1}$$

Здесь $\vec{u}$ – скорость человека, идущего по движущемуся эскалатору, $\vec{u}'$ – скорость человека, идущего по неподвижному эскалатору, $\vec{V}$ – скорость движения эскалатора.

Из пары формул (1) и (2) найдем $\boxed{V = u' \cdot \frac{t_2}{t_1}}$ и подставим в (3). Из пары формул (2) и (3) найдем t_3:

$$S = V \cdot t_1 = u' \cdot t_2 = (u' + V) \cdot t_3 \tag{2}$$

$$\boxed{t_3 = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}} \tag{3}$$

Пример 1.6. В течение двух часов поезд двигался со скоростью $V_1 = 10$ км/ч, затем сделал остановку на $t_0 = 10$ мин. Оставшуюся часть пути поезд шел со скоростью $V_2 = 90$ км/ч. Определите среднюю путевую скорость поезда на всём пройденном пути протяженностью $S = 400$ км.

Решение

$$\langle V \rangle = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_0 + t_2} = \frac{V_1 t_1 + (S - V_1 t_1)}{t_1 + t_0 + \frac{(S - V_1 t_1)}{V_2}} = 96 \text{ км/ч}$$

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Пример 2.1. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры (рис. 2.1). Масса и скорость первого шара равны, соответственно, m_1 = 4 кг и v_1 = 8 м/с, второго шара – m_2 = 6 кг и v_2 = 2 м/с. С какой скоростью u будут двигаться шары после абсолютно неупругого соударения? Какая часть кинетической энергии η шаров перейдет во внутреннюю энергию?

Решение

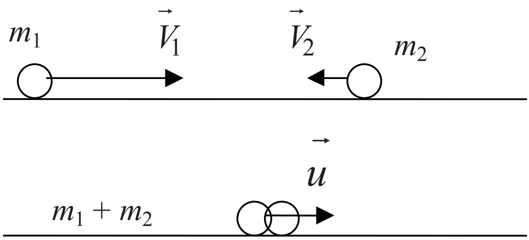


Рис. 2.1

По условию удар является *центральным*, так как центры инерции шаров лежат на линии удара, и *прямым*, так как векторы скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ центров инерции шаров в начале удара направлены параллельно линии удара.

В результате абсолютно неупругого удара шары деформируются и слипаются, т.е. движутся как единое целое со скоростью $\vec{u}$.

Поскольку система может считаться замкнутой $\left(\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0\right)$, можно записать уравнение закона сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{u}\,, \qquad (1)$$

или в проекции на ось OX:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u. \qquad (2)$$

Закон сохранения энергии для абсолютно неупругого удара имеет вид:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{\left(m_1 + m_2\right)u^2}{2} + Q\,. \qquad (3)$$

Особенностью абсолютно неупругого удара является сохранение *полной* энергии, а не *механической* (кинетической) *энергии*, так как часть начальной механической энергии Q затрачивается на деформацию шаров, т.е. переходит во внутреннюю энергию шаров.

Из уравнения (2) найдем скорость шаров после удара:

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}. \tag{4}$$

Из уравнения (3) найдем, какая часть кинетической энергии шаров переходит во внутреннюю энергию:

$$\eta = \frac{Q}{\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}} = \frac{\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}}{\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}. \tag{5}$$

Подставим численные значения в (4) и (5) и получим

$$u = \frac{4 \cdot 8 - 6 \cdot 2}{(4 + 6)} = 2 \text{ м/с}.$$

$$\eta = 1 - \frac{(4 + 6) \cdot 2^2}{4 \cdot 8^2 + 6 \cdot 2^2} = 0{,}857.$$

Пример 2.2. Снаряд массой 9 кг в верхней точке параболической траектории разорвался на два осколка. Осколок массой m_1= 3 кг полетел в обратном направлении с горизонтальной скоростью V_1= 300 м/с. Определите скорость V_2 второго осколка массой m_2 , если скорость снаряда в момент разрыва равна u =250 м/с.

Решение

$$(m_1 + m_2)\vec{u} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2;$$

$$X: (m_1 + m_2)u = -m_1 V_1 + m_2 V_2;$$

$$V_2 = \frac{(m_1 + m_2)u + m_1 V_1}{m_2} = 525 \text{ м/с}$$

Пример 2.3. Частица массой $m_1 = 1 \cdot 10^{-25}$ кг обладает импульсом $p_1 = 5 \cdot 10^{-20}$ кг·м/с. Определите, какой импульс p_2' может передать эта частица, сталкиваясь абсолютно упруго с частицей массой $m_2 = 4 \cdot 10^{-25}$ кг, которая до соударения покоилась. Удар считайте прямым.

Решение

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2';$$

$$p_1 = -p_1' + p_2';$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{\left(p_2' - p_1\right)^2}{2m_1} + \frac{\left(p_2'\right)^2}{2m_2};$$

$$p_2' = 2p_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 8 \cdot 10^{-20}\ \text{кг} \cdot \text{м/с}$$

Пример 2.4. Два шара массами m_1 =200 г и m_2 =100 г подвешены на параллельных нитях одинаковой длины, соприкасаясь между собой (рис. 2.2). Первый шар отклоняют так, что его центр поднимается на высоту H_1= 4,5 см, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после прямого, центрального и абсолютно неупругого соударения? $g = 10$ м/с^2.

Решение

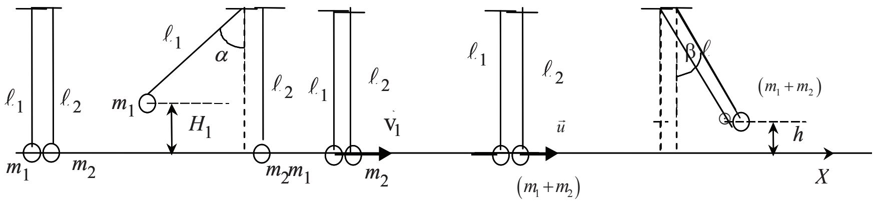


Рис. 2.2

Закон сохранения и превращения энергии для первого груза

$$m_1 g H_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} \tag{1}$$

Закон сохранения импульса при абсолютно неупругом ударе

$$m_1 \vec{V}_1 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{u} \tag{2}$$

Закон сохранения и превращения энергии непосредственно после неупругого удара

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh \tag{3}$$

Ответ: $$h = H_1 \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = 2\ \text{см}$$

Пример 2.5. Однородный шар массой *m* спускается с наклонной плоскости высотой *h* (рис. 2.3). Найдите конечную линейную скорость движения шара (на выходе с наклонной плоскости).

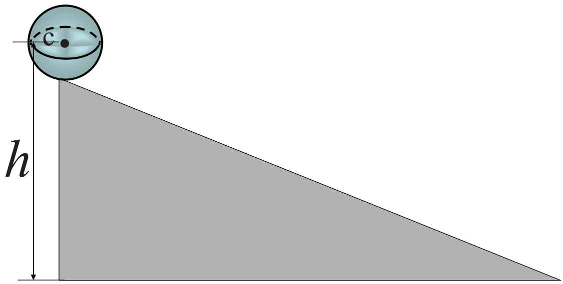


Рис. 2.3. Однородный шар спускается с наклонной плоскости

Решение

Энергетический способ

Считая шар материальной точкой, мы рассматриваем движение шара как поступательное.

Движение осуществляется в результате превращения потенциальной энергии шара в кинетическую энергию поступательного движения шара:

$$mgh = \frac{mV^2}{2}. \tag{1}$$

Здесь мы пренебрегаем затратами энергии на преодоление трения качения.

Ответ: $$V = \sqrt{2gh}. \tag{2}$$

Пример 2.6. Через невесомый блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузики массами $m_2 > m_1$ (*машина Атвуда* – рис. 2.4). С каким ускорением будут двигаться грузики, если их предоставить самим себе? Трением в системах блок – ось и блок – нить следует пренебречь.

Решение

Энергетический способ

Пусть в начальный момент времени грузики закреплены на одном уровне (рис. 2.4, *а*). Если предоставить грузики самим себе, то грузик m_2 ($m_2 > m_1$) опустится вниз на расстояние h, а грузик m_1 – поднимется вверх на то же расстояние (вследствие нерастяжимости нитей) (рис. 2.4, *б*). Источником энергии для движения системы является высвободившаяся потенциальная энергия U_2 грузика m_2. Эта энергия будет израсходована на увеличение потенциальной энергии U_1 грузика m_1 и сообщение обоим грузикам кинетической энергии K_1 и K_2.

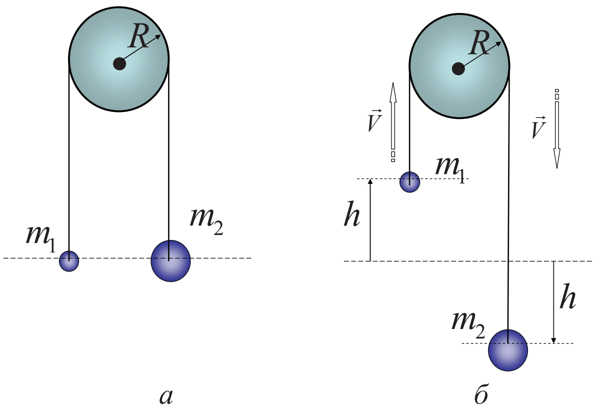


Рис. 2.4. Решение задачи с использованием закона сохранения энергии

Закон сохранения энергии запишем в виде

$$U_2 = U_1 + K_1 + K_2, \qquad (1)$$

или в развернутом виде

$$m_2gh = m_1gh + \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}. \qquad (2)$$

Модули скоростей v_1 и v_2 грузиков m_1 и m_2 будут одинаковыми $v_1 = v_2 = v$, так как ускорения грузиков одинаковы по модулю из-за нерастяжимости нитей.

Составим систему кинематических уравнений для движения грузиков получим:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{at^2}{2}, \\ V &= at, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

так как начальная скорость движения грузиков v_0 равна нулю.

Исключив время t из уравнений (3), получим

$$v^2 = 2ah. \tag{4}$$

Подставим полученное значение квадрата скорости (4) в уравнение (2):

$$m_2 gh = m_1 gh + \frac{m_1 2ah}{2} + \frac{m_2 2ah}{2}. \tag{5}$$

Отсюда – ускорение системы грузов будет равно

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}. \tag{6}$$

3. ДИНАМИКА

Пример 3.1. Однородный шар массой m спускается с наклонной плоскости высотой h (рис. 3.1). Найдите конечную линейную скорость движения шара (на выходе с наклонной плоскости).

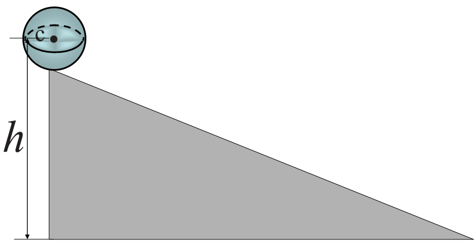


Рис 3.1. Однородный шар спускается с наклонной плоскости

Решение

Динамический способ.

На шар действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ (силой трения пренебрегаем) – рис. 3.2.

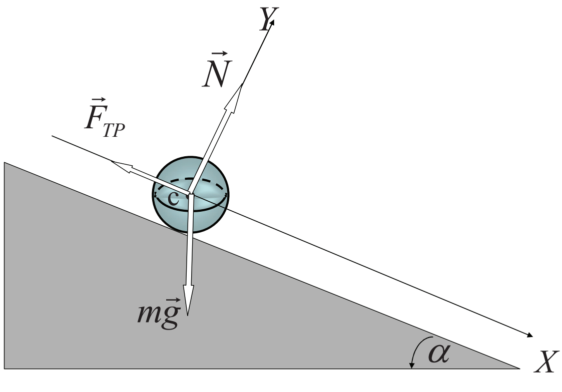


Рис. 3.2. Поступательное движение шара как материальной точки

Уравнение основного закона динамики для поступательного движения запишем так:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} . \qquad (1)$$

Спроецируем это уравнение на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} X: &\qquad mg\sin\alpha = ma, \\ Y: &\quad -mg\cos\alpha + N = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где угол α – предполагаемый угол между наклонной плоскостью и ее основанием (см. рис. 3.2).

Составим систему кинематических уравнений для движения шара:

$$\left.\begin{aligned} \ell &= \frac{at^2}{2}, \\ V &= at, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где ℓ – длина наклонной плоскости.

Начальная скорость равна нулю.

Из системы уравнений (2) следует, что

$$\mathrm{v}^2 = 2a\,\ell\,. \tag{4}$$

Из геометрии

$$\ell = \frac{h}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

Тогда из уравнений (2) и формул (4) и (5) получим

$$V = \sqrt{2gh}\,. \tag{6}$$

Пример 3.2. Через невесомый блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузики массами $m_2 > m_1$ (*машина Атвуда* – рис. 3.3). С каким ускорением будут двигаться грузики, если их предоставить самим себе? Трением в системах блок – ось и блок – нить следует пренебречь.

Решение

Динамический способ

На каждый грузик действуют две силы – тяжести ($m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$) и натяжения нити ($\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$) (рис. 3.3). Силы натяжения нитей можно считать одинаковыми, так как мы не учитываем вращение блока:

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}\right| = T\,. \tag{1}$$

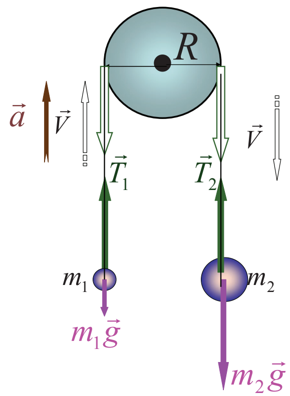


Рис. 3.3. Решение задачи с использованием основного закона динамики для материальной точки – второго закона Ньютона

Уравнения второго закона Ньютона– основного закона динамики материальной точки – (так как грузики движутся поступательно, их можно считать материальными точками, массы которых сосредоточены в их центрах инерции) запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{g} + \vec{T} &= m_1\vec{a}_1, \\ m_2\vec{g} + \vec{T} &= m_2\vec{a}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Так как нить нерастяжима, то ускорения грузиков равны по модулю: $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$.

После проецирования уравнений на вертикальную ось получим:

$$\left.\begin{aligned} -m_1 g + T &= m_1 a_1, \\ -m_2 g + T &= -m_2 a_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Решая совместно эти два уравнения, получим

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}, \qquad (4)$$

Пример 3.3. К динамометру, подвешенному в кабине лифта (рис. 3.4), прикреплен груз массой m = 5 кг. Лифт движется вверх. Определить ускорение лифта, считая его одинаковым по величине при разгоне и торможении, если известно, что во время разгона показание динамометра больше, чем в момент торможения, на ΔF = 15 Н.

Решение

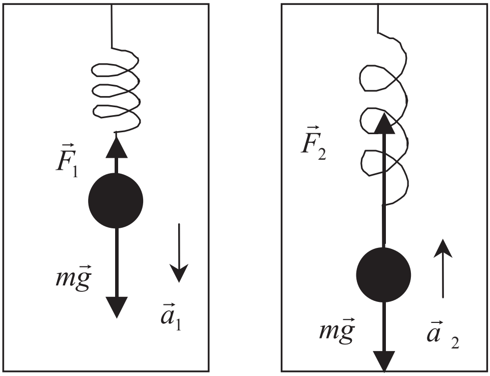


Рис. 3.4

По условию задачи

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a\ .$$

Тогда второй закон Ньютона для груза в первом и втором случаях запишется так:

$$\left.\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{F}_1 &= m\vec{a}_1, \\ m\vec{g} + \vec{F}_2 &= m\vec{a}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Или в проекции на вертикальную ось:

$$F_1 - mg = -\,ma, \qquad (2)$$

$$F_2 - mg = ma.$$

Вычтем из второго уравнения первое. Получим

$$F_2 - F_1 = 2ma. \qquad (3)$$

По условию задачи

$$F_2 - F_1 = \Delta F. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) получаем

$$\Delta F = 2ma. \qquad (5)$$

Отсюда

$$a = \frac{\Delta F}{2m}. \qquad (6)$$

Подставим численные значения и выполним вычисления:

$$a = \frac{15}{2 \cdot 5} = 1{,}5\,\text{м/с}^2.$$

Пример 3.4. Трамвай (рис. 3.5) , трогаясь с места, движется с постоянным ускорением a_1= 0,5 м/с^2. Через 12 с после начала движения мотор трамвая выключается и трамвай движется до остановки равнозамедленно. На всем пути движения трамвая коэффициент трения равен 0,01. Найдите общее расстояние, пройденное трамваем, и время торможения.

Решение

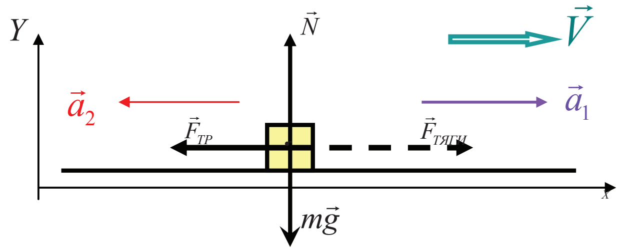


Рис. 3.5

1. $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{ТЯГИ} + \vec{F}_{TP} = m\vec{a}_1;$

$$Y: \ -mg + N = 0$$

$$X: -F_{TP} = -ma_2$$

$$F_{TP} = k \cdot N = k \cdot mg$$

2. $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{TP} = m\vec{a}_2$

$$Y: \ -mg + N = 0$$

$$X: F_{ТЯГИ} - F_{TP} = ma_1$$

$$F_{TP} = k \cdot N = k \cdot mg$$

$$S_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$$

$$S_2 = V_{02} \cdot t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2};$$

$$V_{02} = V_1 = a_1 t_1$$

$$a_2 = k \cdot g$$

$$S_2 = 6 \cdot t_2 - \frac{9,81 \cdot 10^{-2} \cdot t_2^2}{2};$$

$$V_2 = V_{02} - a_2 t_2 = 0$$

$$t_2 = 61,2 \text{ с}$$

Ответ: $S = S_1 + S_2 = 219$ м

Пример 3.5. На гладком столе стоит тележка массой m_1 =4 кг. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через укрепленный на столе блок (рис. 3.6). С каким ускорением будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой m_2 = 1 кг? *Ответ:* 1,96 м/с^2.

Решение

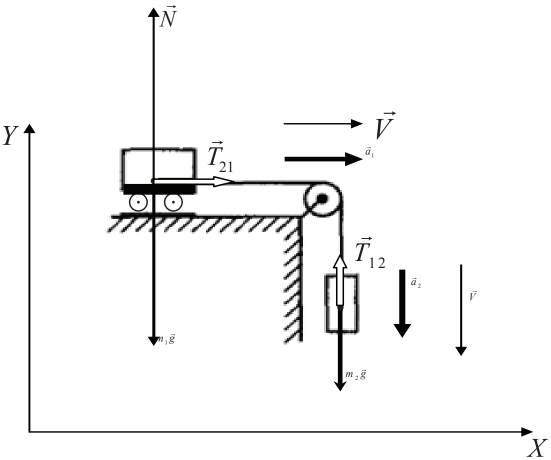


Рис. 3.6

Уравнение второго закона Ньютона для тележки:

$$m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_{21} = m_1\vec{a}_1$$

$$Y : -m_1 g + N = 0$$

$$X: T = m_1 a$$

Уравнение второго закона Ньютона для гири:

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_{12} = m_2\vec{a}_2$$

$$Y: -m_2 g + T = -m_2 a$$

Вследствие нерастяжимости нити

$$\boxed{|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a}$$

Силы натяжения, действующие на тележку и на гирю, равны вследствие невесомости блока:

$$\boxed{|\vec{T}_{12}| = |\vec{T}_{21}| = T}$$

Ускорение всей системы (тележка и гиря) равно

$$a = g \cdot \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$a = 1{,}96 \text{ м/с}$$

Пример 3.6. Тело брошено под углом α = 60° к горизонту в однородном *гравитационном поле Земли* напряженностью g. Величина g имеет размерность ускорения и поэтому носит название *ускорения свободного падения.* Выведите кинематические уравнения движения и уравнение траектории. Определите начальную скорость v_0 тела, если оно побывало на одной и той же высоте спустя $t_1 = 1$ с и $t_2 = 3$ с после начала движения, и величину этой высоты h (рис. 3.7). Найдите тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в начальный момент движения.

Решение

По условию задачи

$$y(t_1) = y(t_2) = h. \qquad (1)$$

Поскольку

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

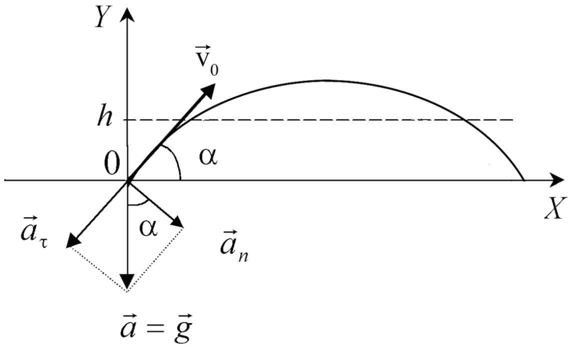


Рис. 3.7

то

$$\left(v_0 \sin\alpha\right)t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \left(v_0 \sin\alpha\right)t_2 - \frac{gt_2^2}{2}\,. \tag{2}$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{g\left(t_1 + t_2\right)}{2\sin\alpha}\,. \tag{3}$$

Тогда в соответствии с формулой (2)

$$h = y\left(t_1\right) = \frac{g\left(t_1 + t_2\right)t_1}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1 t_2}{2}\,. \tag{4}$$

Нормальное и тангенциальное ускорения равны

$$a_n = g\cos\alpha,$$
$$a_\tau = g\sin\alpha.$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$v_0 = \frac{9{,}81\left(1+3\right)}{2\sin 60^\circ} = 22{,}7\ \text{м/с}\,,$$
$$a_n = 9{,}81\cos 60^\circ = 4{,}91\ \text{м/с}^2\,,$$
$$a_\tau = 9{,}81\sin 60^\circ = 8{,}50\ \text{м/с}^2\,,$$
$$h = \frac{9{,}81\cdot 1\cdot 3}{2} = 14{,}7\ \text{м}\,.$$

Пример 3.7. Спутник движется по круговой орбите на высоте $h = 500$ км над поверхностью Марса (рис. 3.8). Найдите орбитальную скорость спутника, если масса Марса равна $M = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг, а радиус планеты равен $R_{\text{М}} = 3{,}4$ Мм.

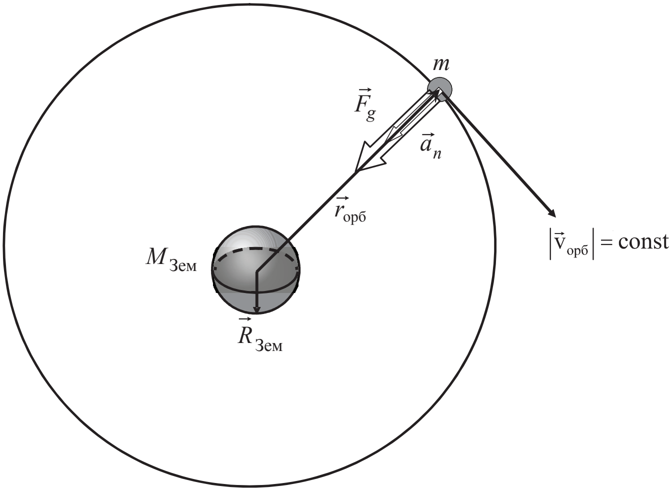


Рис. 3.8

Решение

В соответствии с условием задачи необходимо определить круговую (т.е. *первую космическую*) скорость спутника. Используем формулу

$$\text{v} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}, \tag{1}$$

где $r = R_{\text{М}} + h$.

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$\text{v} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{23}}{3{,}4 \cdot 10^{6} + 5 \cdot 10^{5}}} = 3{,}31 \text{ км/с}.$$

Пример 3.8. Камень свободно падает с обрыва, Какой путь он пройдет за восьмую секунду с начала падения?

Решение

$$\Delta h = y_8 - y_7 = \frac{g}{2}\left(t_8^2 - t_7^2\right) = 73{,}5 \text{ м}$$

Пример 3.9. Тело брошено с поверхности Земли под углом $\alpha = 45°$ к горизонту с начальной скоростью V_0=20 м/с (рис.3.9). На какой высоте вектор скорости этого тела будет составлять с горизонтом угол $\beta = 30°$? $g = 9{,}81$ м/с^2.

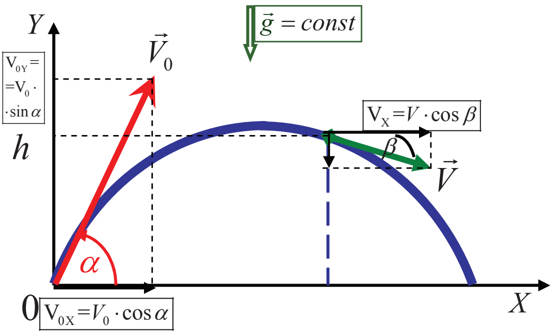


Рис. 3.9

Решение

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh + \frac{mV^2}{2};$$

$$V_{0X} = const = V_X;$$

$$V = V_0 \cdot \frac{\cos 45°}{\cos 30°};$$

$$h = \frac{V_0^2 - V^2}{2g} = 6{,}80 \text{ м}$$

Пример 3.10. Определите скорость движения Луны вокруг Земли, считая, что Луна движется по круговой орбите. Расстояние между Луной и Землей r = 384,4 Мм. Масса Земли $M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 .

Решение

Из закона всемирного тяготения:

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m\frac{V^2}{r};$$

Ответ: $V = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = 1{,}02$ км/с

Статика

Пример 3.11. При взвешивании на неравноплечих рычажных весах вес тела на одной чашке получился равным $P_1 = 30$ Н, на другой – $P_2 = 34$ Н (рис. 3.10). Найдите истинный вес тела.

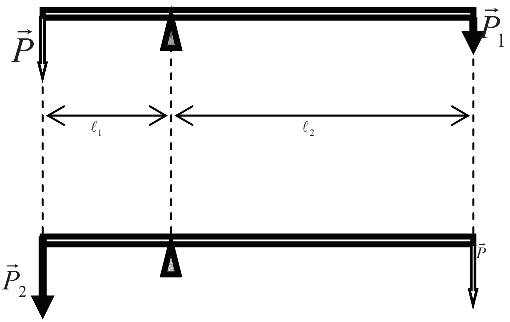


Рис. 3.10

Уравнения моментов для первого и второго взвешиваний:

$$P \cdot \ell_2 = P_2 \cdot \ell_1$$

$$P \cdot \ell_1 = P_1 \cdot \ell_2$$

$$P^2 = P_1 \cdot P_2$$

Ответ: $\boxed{P = \sqrt{P_1 \cdot P_2} = 31{,}9H}$

Пример 3.12. Тяжелая однородная доска массой m и длиной $AB = \ell$ (рис. 3.11) упирается одним концом в угол между стенкой и полом. К другому концу доски привязан канат BC.

Найдите силу натяжения T каната BC, если угол между доской и канатом $\beta = 90°$. Как меняется сила натяжения каната с увеличением угла α, если угол β остается постоянным?

$$\boxed{AO = OB = \frac{\ell}{2}}$$

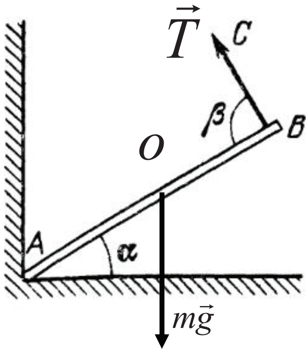


Рис. 3.11

Решение

Сила натяжения определяется из условия равновесия доски:

сумма моментов сил натяжения и тяжести относительно точки А должна быть равна нулю.

$$T_{BC}\cdot\ell = mg\cdot\frac{\ell\cdot\cos\alpha}{2}$$

$$T_{BC} = \frac{mg\cdot\cos\alpha}{2}.$$

При изменении угла α от 0° до 90° сила натяжения уменьшается от $\frac{mg}{2}$ до нуля.

Гидростатика

Пример 3.13. В воде плавает в вертикальном положении труба (рис. 3.12). Высота выступающей из воды части трубы h = 5 см. Внутрь трубы наливают масло, плотность которого равна 900 кг/м^3. Плотность воды равна 1000 кг/м^3 .

Какой высоты H должна быть труба для того, чтобы её можно было заполнить маслом целиком?

Решение

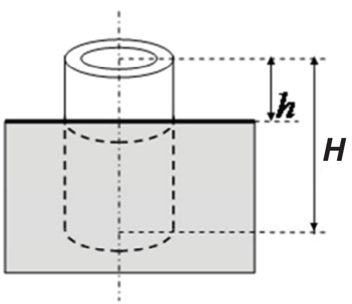


Рис. 3.12

Длина трубы y найдется из условия

$$\rho g h = \rho_0 g\left(y-h\right)$$

где ρ_0 – плотность воды.

Отсюда

$$y = \frac{\rho_0 h}{\rho_0-\rho} = 50 \text{ см}$$

Пример 3.14. Резиновый мяч массой m радиусом R погружают под воду на глубину h и отпускают. На какую высоту, считая от поверхности воды, подпрыгнет мяч? Сопротивлением воды и воздуха следует пренебречь.

Решение

Используя закон сохранения энергии и закон Архимеда, приходим к уравнению

$$mgy = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho - m\right) \cdot gh,$$

где ρ – плотность воды, а y – искомая высота.

Ответ:

$$\boxed{y = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho - m\right) h}{m}}$$

Пример 3.15. Медный шар, в котором имеется воздушная полость, опущен в керосин. Объём шара 0,1 м^3. Найдите объём воздушной полости, если шар плавает на поверхности керосина, погрузившись в него на 0,89 своего объёма. Плотность меди равна 8900 кг/м^3, керосина – 800 кг/м^3 .

Решение

Условие плавания:

$$F_A = mg \qquad (1)$$

$$\rho_к g \cdot 0{,}89V = \rho g(V - V_{\text{полости}}) \qquad (2)$$

$$V_{\text{полости}} = V - (\rho_к/\rho) \cdot 0{,}89V = 0{,}092 \text{ м}^3 \qquad (3)$$

Пример 3.16. Тело плавает в воде, погрузившись в нее на 3/4 своего объема. Какая часть объема тела будет погружена в глицерин? Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность глицерина 1250 кг/м^3.

Решение

Согласно закону Архимеда для тела, плавающего в воде, –

$$\rho_{\text{тела}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{воды}} \cdot V_{\text{погруж}} \cdot g, \qquad (1)$$

где $V_{\text{погруж}} = \dfrac{3}{4}V$. Отсюда можно найти $\rho_{\text{тела}}$:

$$\rho_{\text{тела}} = \frac{3}{4}\rho_{\text{воды}} = 750 \text{ кг/м}^3 . \qquad (2)$$

Записывая аналогично закон Архимеда для тела, плавающего в глицерине, получим:

$$\rho_{\text{тела}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{глицерина}} \cdot V'_{\text{погруж}} \cdot g, \qquad (3)$$

где $V'_{\text{погруж}}$ – объем погруженной в глицерин части тела.

Отсюда выражаем

$$\frac{V'_{\text{погруж}}}{V} = \frac{\rho_{\text{тела}}}{\rho_{\text{глицерина}}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{глицерина}}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1000}{1250} = 0,6.$$

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Пример 4.1. Точка совершает колебания по закону $x(t) = A \sin \omega_0 t$. В некоторый момент времени смещение точки оказалось равным $x_1 = 5$ см. Когда же фаза колебаний Ф увеличилась вдвое, смещение стало равным $x_2 = 8$ см. Определите амплитуду колебаний A. Решение

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A\sin\Phi_1, \\ x_2 &= A\sin\Phi_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

По условию задачи $\Phi_2 = 2\Phi_1$. Следовательно:

$$\sin\Phi_2 = \sin\left(2\Phi_1\right) = 2\sin\Phi_1\cos\Phi_1 .$$

Тогда систему уравнений (1) перепишем так:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A\sin\Phi_1, \\ x_2 &= 2A\sin\Phi_1\cos\Phi_1, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= A\sin\Phi_1, \\ x_2 &= 2x_1\cos\Phi_1. \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Выразим из системы уравнений (2)

$$\left.\begin{aligned} \sin\Phi_1 &= \frac{x_1}{A}, \\ \cos\Phi_2 &= \frac{x_2}{2x_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2\Phi_1 + \cos^2\Phi_1 = 1 . \qquad (4)$$

Подставим (3) в тождество (4). Получим

$$\frac{x_1{}^2}{A^2} + \frac{x_2{}^2}{4x_1{}^2} = 1 .$$

Отсюда выразим амплитуду колебаний

$$A = \frac{2x_1{}^2}{\sqrt{4x_1{}^2 - x_2{}^2}} .$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$A = \frac{2\cdot(0{,}05)^2}{\sqrt{4(0{,}05)^2-(0{,}08)^2}} = 0{,}0833 \text{ м.}$$

Пример 4.2. К пружине подвешен груз. Зная, что максимальная кинетическая энергия гармонических колебаний груза равна $K_{max} = 1$ Дж, найдите коэффициент упругости (жесткость) k пружины. Амплитуда колебаний равна $A = 0{,}05$ м.

Решение

Груз на пружине (пружинный маятник) совершает гармонические колебания по закону

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{1}$$

Скорость колебаний маятника выражается уравнением

$$\mathrm{v}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{2}$$

где

$$A\omega_0 = \mathrm{v}_{max}, \tag{3}$$

здесь v_{max} – амплитуда скорости.

Поэтому с учетом формулы (3) максимальная кинетическая энергия пружинного маятника равна

$$K_{max} = \frac{m\mathrm{v}_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \tag{4}$$

Подставим квадрат собственной частоты колебаний пружинного маятника

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

в формулу (4) и получим, что максимальная кинетическая энергия равна

$$K_{max} = \frac{kA^2}{2}. \tag{5}$$

Отсюда может быть найдена жесткость пружины

$$k = \frac{2K_{max}}{A^2}. \tag{6}$$

Подставим числовые значения и выполним вычисления:

$$k = \frac{2 \cdot 1}{0{,}05^2} = 800 \text{ Н/м.}$$

Эту задачу можно решить *другим* способом.

В соответствии с законом сохранения энергии

$$K_{max} = U_{max} \tag{7}$$

или

$$K_{max} = \frac{kA^2}{2} \tag{8}.$$

Отсюда можно найти жесткость пружины *k*.

Пример 4.3. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью u = 15 м/с. Период T колебаний точек равен 1,2 с, амплитуда A = 2 см. Определите: 1) длину волны λ, 2) частоту волны ω, 3) волновое число k, 4) фазу колебаний Φ, 5) смещение точки S, отстоящей на расстоянии x = 45 м от источника волн в момент t = 4 с; 6) разность фаз $\Delta\Phi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях x_1 = 20 м и x_2 = 30 м.

Решение

1. Длина волны равна расстоянию, которое волна

проходит за один период, и может быть найдена из соотношения (4.27):

Подставив значения величин u и T, получим

$$\lambda = 18 \text{ м.}$$

2. Циклическая частота волны – в соответствии с (4.25) – равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}2} = 5{,}24 \text{ с}^{-1}.$$

3. Волновое число – в соответствии с (4.26) – равно

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{18} = 0{,}35 \text{ м}^{-1}$$

4. Запишем уравнение волны:

$$S(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

Фаза колебаний точки с координатой x в момент времени определяется выражением, стоящим в уравнении волны под знаком косинуса:

$$\Phi = \omega t - kx = 5{,}24 \text{ рад}$$

5. Смещение точки определим, подставив в уравнение волны значения амплитуды A и фазы Φ:

$$S(x,t) = A\cos(\omega t - kx) = A\cos\Phi = 0{,}02 \cdot \cos 5{,}24 = 0{,}01 \text{ м.}$$

6. Разность фаз $\Delta\Phi$ колебаний двух точек волны связана с расстоянием Δx между этими точками соотношением

$$\Delta\Phi = k \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x_2 - x_1)$$

Подставив значения величин λ, x_1 и x_2 и вычислив, получим

$$\Delta\Phi = 3{,}49 \text{ рад}$$

5. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Пример 5.1. Найдите число атомов N и их концентрацию n в медной монете массой

$$m = 5 \text{ г}.$$

Оцените размер d атома меди. Плотность меди $\rho = 8600$ кг/м^3.

Решение

Число атомов меди N найдем по формуле

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \tag{1}$$

где μ – молярная масса меди, которую определим по таблице Менделеева (~ относительная атомная масса). Концентрацию n найдем по формуле (2):

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu}$$

Поскольку в твердых телах атомы плотно примыкают друг к другу, размер атома d примерно равен расстоянию между атомами, следовательно

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Проверим размерность величины d:

$$[N] = \left[\frac{m}{\mu} N_A\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль}} = 1$$

$$[n] = \left[\frac{\rho N_A}{\mu}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{моль}} = \text{м}^{-3}$$

$$[d] = \left[\sqrt[3]{\frac{1}{n}}\right] = \sqrt[3]{\text{м}^3} = \text{м}$$

Представим размерность исходных данных задачи в системе СИ и проведем расчет:

$$m = 5 \text{ г} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}, \rho = 8600 \text{ кг/м}^3, \mu = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

$$N = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} = 4,7 \cdot 10^{22};$$

$$n = \frac{8600 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} = 8,1 \cdot 10^{28}\,\text{м}^{-3};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{8,1 \cdot 10^{28}}} = 0,5 \cdot 10^{-10}\,\text{м}.$$

Пример 5.2. Найдите молярную массу газовой смеси, состоящей из одной части (по массе) водорода и восьми частей кислорода.

Решение

Обозначим массы водорода и кислорода m_1 и m_2, молярные массы соответственно μ_1 и μ_2. Молярная масса смеси равна

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\nu}, \tag{1}$$

где ν – количество смеси (в молях).

Количество смеси равно

$$\nu = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}, \tag{2}$$

тогда – с учетом (1) – для молярной массы получим выражение

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}}. \tag{3}$$

Учтем, что по условию $m_2 = 8m_1$, тогда окончательно – с учетом (3) – получим следующее выражение для μ:

$$\mu = \frac{9\mu_1\mu_2}{8\mu_1 + \mu_2}.$$

Проверим размерность молярной массы μ:

$$[\mu] = \left[\frac{9\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{моль}^2} = \text{кг/моль}.$$

Представим размерность молярных масс в системе СИ и проведем расчет.

$$\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль},\ \mu_2 = 32 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}.$$

$$\mu = \frac{9 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 32 \cdot 10^{-3}} = 12 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}.$$

Пример 5.3. Найдите для кислорода при температуре T = 300 К среднюю квадратичную скорость молекул.

Решение

Средняя квадратичная скорость может быть найдена по формуле

$$\text{v}_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle \text{v}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \qquad (1)$$

Проведем расчет:

$$\text{v}_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{32 \cdot 10^{-3}}} = 483\ \text{м/с}.$$

Пример 5.4. Определите среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы азота при температуре 1 кК. Постоянная Больцмана k =1,38$\cdot$10^{-23} Дж/К.

Решение

С учетом того, что при поступательном движении молекулы в трехмерном пространстве число степеней равно трём,

$$\langle \varepsilon_K \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$\langle \varepsilon_K \rangle = 20{,}7 \cdot 10^{-21}\,\text{Дж}$$

6. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

Пример 6.1. Баллон вместимостью $V = 20$ л содержит *атомарный* водород при температуре $T_1 = 300$ К под давлением $P_1 = 0{,}4$ МПа. Каковы будут температура и давление газа, если ему сообщить количество теплоты $Q = 6$ кДж? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Решение

$$P_1V = \frac{m}{\mu}RT_1; \tag{1}$$

$$\frac{m}{\mu} = \frac{P_1V}{RT_1}; \tag{2}$$

$$P_2V = \frac{m}{\mu}RT_2; \tag{3}$$

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{3}{2}\frac{P_1V}{T_1}\Delta T; \tag{4}$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T = 450 \text{ К};$$

$$P_2 = P_1\frac{T_2}{T_1} = 0{,}6 \text{ МПа}$$

Пример 6.2. Котел вместимостью 2 м^3 содержит водяной пар массой 10 кг при температуре 500 К. Определите давление пара в котле.

Решение

Из уравнения Клапейрона-Менделеева

$$P = \frac{m}{\mu}\cdot\frac{RT}{V} \tag{1}$$

$$P = 1{,}15 \text{ МПа}$$

Пример 6.3. Определите количество теплоты, поглощаемой водородом массой $m = 0{,}2$ кг при нагревании его от температуры $t_1 = 0$ °С до температуры $t_2 = 100$ °С при постоянном давлении. Найдите также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Решение

Количество теплоты Q, поглощаемое газом при изобарическом нагревании, определяется по формуле

$$Q = mC_P^{\text{уд}}\Delta T\ , \tag{1}$$

где m – масса нагреваемого газа; $C_P^{\text{уд}}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении; ΔT – изменение температуры газа.

Количество теплоты можно определить так:

$$Q = m\left(\frac{i+2}{2}\right)\frac{R}{\mu}\Delta T. \tag{2}$$

Произведем вычисления по формуле (2) и найдем

$$Q = 291 \text{ кДж.}$$

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T. \tag{3}$$

После подстановки в формулу (3) численных значений величин и вычислений получим

$$\Delta U = 208 \text{ кДж.}$$

Работу расширения газа определим по формуле, выражающей первое начало термодинамики:

$$A = Q - \Delta U. \tag{4}$$

Подставив в (4) численные значения Q и ΔU, найдем

$$A = 83 \text{ кДж.}$$

Пример 6.4. Кислород занимает объем V_1 = 1 м^3 и находится под давлением P_1 = 200 кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема V_2 = 3 м^3, а затем при постоянном объеме до давления P_3 = 500 кПа. Постройте график процесса и найдите: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную газом работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

Решение

Построим график процесса (рис. 6.1). На графике точками 1, 2, 3 обозначены состояния газа, характеризуемые параметрами (P_1, V_1, T_1), (P_1, V_2, T_2), (P_3, V_2, T_3).

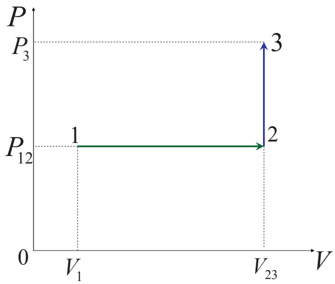


Рис. 6.1

1. Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния 1 в состояние 3 выражается формулой

$$\Delta U = C_V^{\text{мол}} \cdot \Delta T, \tag{1}$$

где $C_V^{\text{мол}}$ – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; m – масса газа; ΔT – разность температур, соответствующих конечному 3 и начальному 1 состояниям, т. е. $\Delta T = T_3 - T_1$.

Так как

$$C_V^{\text{мол}} = \frac{i}{2} R, \tag{2}$$

то

$$\Delta U = \nu C_V^{\text{мол}} \Delta T_{31} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \left(T_3 - T_1 \right). \tag{3}$$

Температуры T_1 и T_3 выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$T_1 = \frac{\mu P_1 V_1}{mR}; \; T_3 = \frac{\mu P_2 V_2}{mR}. \tag{4}$$

С учетом (4) выражение (3) принимает вид

$$\Delta U = \left(\frac{i}{2}\right)\left(P_3 V_2 - P_1 V_1\right). \qquad (5)$$

Подставим в (5) значения величин, учитывая, что для кислорода как двухатомного газа i = 5, и, произведя вычисления, получим

$$\Delta U = 3{,}25 \text{ МДж.}$$

2. Полная работа, совершаемая газом, равна $A = A_1 + A_2$, где A_1 – работа на участке 1-2; A_2 – работа на участке 2-3.

На участке 1-2 давление постоянно (p = const). Работа в этом случае выражается формулой $A_1 = P_1 \Delta V = P_1\left(V_2 - V_1\right)$. На участке 2-3 объем газа не изменяется и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю (A_2 = 0). Таким образом,

$$A = A_1 = P_1\left(V_2 - V_1\right). \qquad (6)$$

Подставив в формулу (6.82) числовые значения физических величин и произведя вычисления, получим

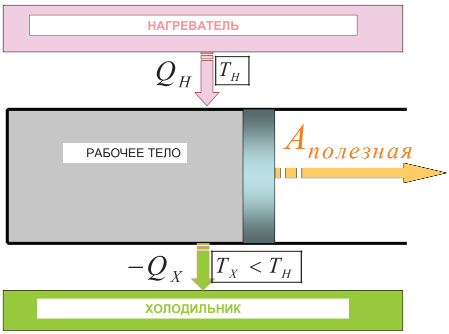
$$a = 0{,}4 \text{ МДж.}$$

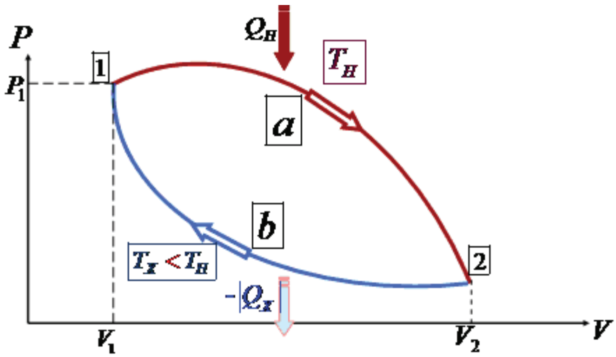
3. Согласно первому началу термодинамики) количество теплоты Q, переданное газу, будет равно

$$Q = A + \Delta U = 3{,}65 \text{ МДж.}$$

7. КРУГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ (ЦИКЛЫ). КПД ТЕПЛОВОЙ МАШИНЫ

Пример 7.1. Рабочее тело теплового двигателя получает от нагревателя количество теплоты, равное 600 кДж. Какую полезную работу совершит тепловой двигатель, если его КПД равен 30 %? Какое количество теплоты получает холодильник?





$$Q_н = U_2 - U_1 + A_{1a2}$$

$$-|Q_х| = (U_1 - U_2) + A_{2b1}.$$

$$Q_н - Q_х = A_{1a2} + A_{2b1} = A_{полезн}$$

$$\boxed{\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_{\text{н}} + \left(-\left|Q_{\text{х}}\right|\right)}{Q_{\text{н}}}}$$

$$A_{\text{полезн}} = 180\ \text{кДж}$$

$$Q_{\text{х}} = -440\ \text{кДж}$$

Пример 7.2. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, $2/3$ количества теплоты, полученного от нагревателя, отдает холодильнику. Температура холодильника равна 280 К. Определите температуру нагревателя.

Решение

Термический коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_{\text{н}} - \left|Q_{\text{х}}\right|}{Q_{\text{н}}} = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}},$$

где $Q_{\text{н}}$ – количество теплоты, полученной рабочим телом от нагревателя; $Q_{\text{х}}$ – количество теплоты, переданное окружающей среде (холодильнику); $T_{\text{н}}$ – температура нагревателя; $T_{\text{х}}$ – температура холодильника.

$$1 - \frac{\left|Q_{\text{х}}\right|}{Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{T}{T};\ \left|Q_{\text{х}}\right| = \frac{2}{3} Q_{\text{н}};$$

$$T_{\text{н}} = 420\ \text{K}$$

Пример 7.3. Нагреватель тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, имеет температуру $t_{\text{н}}$ = 200 °С. Определите температуру $T_{\text{х}}$ холодильника, если при получении от нагревателя количества теплоты $Q_{\text{н}}$ = 1 Дж машина совершает работу A = 0,4 Дж. Потерями на трение и теплоотдачу следует пренебречь.

Решение

Температуру холодильника найдем, используя выражение для термического КПД машины, работающей по циклу Карно, откуда

$$T_{\text{х}} = T_{\text{н}}\left(1 - \eta\right). \tag{1}$$

Термический КПД тепловой машины выражает отношение количества теплоты, которое превращено в механическую работу A, к количеству теплоты $Q_Н$, которое получено рабочим телом тепловой машины из внешней среды (от нагревателя), т.е.

$$\eta = A/Q_н \,. \tag{2}$$

После подстановки получим

$$T_х = T_н \left(1 - A/Q_н\right) . \tag{3}$$

Подставляя численные значения и учитывая, что $T_н$ = 473 К, после вычисления получаем

$$T_х = 284 \text{ К}.$$

8. АГРЕГАТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Пример 8.1. С какой наименьшей скоростью должна лететь свинцовая дробинка, чтобы при ударе о препятствие она расплавилась? Считайте, что $\eta = 80$ % кинетической энергии превратилось во внутреннюю энергию дробинки, а температура дробинки до удара была 127 °C.

$$C_{\text{св}} = 130 \text{ Дж/}(\text{кг} \cdot \text{К});$$

$$T_{\text{плав}} = 600 \text{ К};$$

$$\lambda_{\text{св}} = 2{,}3 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг};$$

$$\eta \cdot \frac{m \cdot V^2}{2} = C_{\text{св}} \cdot m \cdot \left(T_{\text{плав}} - T\right) + \lambda_{\text{св}} \cdot m; \qquad (1)$$

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(C_{\text{св}} \cdot \Delta T + \lambda_{\text{св}}\right)}{\eta}}; \qquad (2)$$

Ответ: $V = 350$ м/с.

Пример 8.2. Сколько стали, взятой при 20 °C, можно расплавить в печи с КПД η = 50 %, сжигая 2 т каменного угля?

Дано: $\eta = 50$ %;

$m_{\text{кам.угля}} = 2$ т;

$t_{\text{стали}} = 20$ °C.

Найти: $m_{\text{стали}}$

Удельная теплоемкость стали

$$C_{\text{стали}} = 460 \text{ Дж/}(\text{кг} \cdot \text{К})$$

Удельная теплота плавления стали

$$\lambda_{\text{стали}} = 8{,}2 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}$$

Температура плавления стали

$$T_{\text{плавл}} = 1673 \text{ К}$$

Теплотворная способность угля

$$q_{\text{угля}} = 2{,}9 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$$

КПД печи

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_3}$$

Решение

1. Теплота для нагревания стали до температуры плавления

$$Q_1 = C_{\text{стали}} m_{\text{стали}} \left(T_{\text{плав}} - T_{\text{стали}}\right)$$

2. Теплота плавления стали

$$Q_2 = \lambda_{\text{стали}} \cdot m_{\text{стали}}$$

3. Теплота сгорания каменного угля

$$Q_3 = \left(q \cdot m\right)_{\text{угля}}$$

Ответ: $m_{\text{стали}} = 4 \cdot 10^4$ кг

Пример 8.3. В калориметре находится лёд массой 4 кг при температуре (–40) °C.

В калориметр пускают пар массой 1 кг при температуре 120 °C.

Определите установившуюся температуру системы θ.

Удельная теплоемкость льда

$$C_{\text{льда}} = 2100 \text{ Дж/}\left(\text{кг} \cdot \text{К}\right)$$

Удельная теплоемкость воды

$$C_{\text{воды}} = 4200 \text{ Дж/}\left(\text{кг} \cdot \text{К}\right)$$

Удельная теплота плавления льда

$$\lambda_{\text{льда}} = 3{,}35 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$$

Удельная теплота парообразования воды

$$r_{\text{п}} = 2{,}26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$$

Удельная теплоемкость пара

$$C_п = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/\left(\text{К} \cdot \text{кг}\right)$$

Нагреванием калориметра пренебрегите.

Решение

Тепло отдают:

Пар:

1) при охлаждении до 100 °С

2) при конденсации;

вода, сконденсировавшаяся из пара, при остывании от 100 °С до температуры θ.

$$\left|Q_{отд}\right| = C_п m_п \left(t_2 - 100\right) + r_п m_п + C_B m_п \left(100 - \theta\right)$$

Тепло получают:

лёд:

1) при нагревании

2) при плавлении;

вода, полученная из льда, нагревается от 0 °С до температуры θ.

$$Q_{получ} = C_л \cdot m_л \left(0 - t_1\right) + \lambda_л m_л + C_B m_л \left(\theta\ -\ 0\right)$$

Уравнение теплового баланса:

$$\left|Q_{отд}\right| = Q_{получ}$$

Ответ: θ = 50 °С

Пример 8.4. Сосуд со 100 г воды при температуре 0 °С был подвешен посередине комнаты. Через 15 мин температура воды поднялась до 2 °С. Когда же в сосуде поместили равное по массе количество льда при 0 °С, то он растаял за 10 ч. Оцените по этим данным величину удельной теплоты плавления льда.

Удельная теплоёмкость воды

$$C_В = 4200 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Удельная теплоёмкость льда

$$C_Л = 2100 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Решение

Количество теплоты, получаемой в единицу времени водой и льдом примерно одинаково, т.к. разность температур воды и комнатного воздуха примерно такая же, как льда и воздуха. За 15 мин вода получила теплоту

$$Q = C_B m \Delta t = 840 \text{ Дж} .$$

Следовательно, лёд за 10 час получил 33600 Дж.

Отсюда – удельная теплота плавления льда составит

$$q_{\text{пл}} = \frac{33600}{0{,}1} = 3{,}36 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$$

Приложение 1

Таблица физических величин 1

Скорость света в вакууме $c = 3\cdot 10^8$ м/с	Расстояние от центра Солнца до центра Земли $1{,}49\cdot 10^{11}$ м
Радиус Земли $R_З = 6{,}37\cdot 10^6$ м	Масса Земли $M_З = 5{,}98\cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца $R_С = 6{,}95\cdot 10^8$ м	Масса Солнца $M_С = 1{,}98\cdot 10^{30}$ кг
Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2	Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Элементарный заряд $e = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ Кл	Масса покоя электрона $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона. $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$кг	Масса покоя нейтрона $m_n = 1{,}68\cdot 10^{-27}$кг
Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м	Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м
Электрическая постоянная в законе Кулона. $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9\cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2	
Постоянная Планка. $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с, $\hbar = 1{,}054\cdot 10^{-34}$ Дж·с	
Атомная единица массы (а.е.м.) $1{,}66\cdot 10^{-27}$ кг 931,4 МэВ	
Постоянная Больцмана $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К	Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/ (К·моль)
Число $\pi = 3{,}14$	

Приложение 2

Таблица физических величин 2

Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2	Число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/ (К·моль)
Нормальные условия: давление $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па; температура $T_0 = 273$ К	
Удельная теплоемкость льда $c = 2100$ Дж/(кг · К). Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг ·К). Удельная теплота парообразования воды $q = 2{,}26 \cdot 10^6$Дж/кг. Удельная теплота плавления льда $q = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг	Плотность ρ (кг/м^3): Воздуха – 1,29; Воды – 1000; Ртути – 13600
Молярная масса μ (кг/моль) *молекулярных* газов: Азота – 0,028; Водорода – 0,002; Воздуха – 0,029; Водяного пара – 0,018; Кислорода – 0,032; Углекислого газа – 0,044. Молярная масса μ (кг/моль) *атомарных* газов: Гелия–0,004; Ксенона – 0,131	

Учебное издание

Рахштадт Юрий Александрович

ФИЗИКА

Методическое пособие по подготовке к олимпиадам школьников

9–11-й классы

Часть II
Механика. Молекулярная физика и термодинамика

Руководство к решению задач

В авторской редакции

Компьютерная верстка *И.Г. Иваньшина*

Подписано в печать 01.09.16	Бумага офсетная	
Формат 60×90 $^1/_{16}$	Печать цифровая	Уч.-изд. л. 3,1
	Тираж 100 экз.	Заказ 5190

Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (495) 638-45-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (499) 236-76-17, тел./факс (499) 236-76-35